Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TURMA ESPECIAL

EXAME (3H) E SEGUNDO TESTE [PERGUNTAS 6-10] (1H30) PARA PRATICAR

apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) (1) Seja $f : E^3 \to \mathbb{R}$ a função

$$f(x, y, z) = x^2y + e^x + z.$$

Mostre que existe uma função $g : E^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ definida numa vizinhança de $(1, -1)$, tal que $g(1, -1) = 0$ e $f(g(y, z), y, z) = 0$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial y}(1, -1)$, $\frac{\partial g}{\partial z}(1, -1)$, e $\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(1, -1)$.

(2 val.) (2) Escreva o seguinte integral em coordenadas esféricas em termos de um integral iterado em coordenadas cartesianas

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos\phi}}^{2} \int_0^{\pi} g(\rho, \theta, \phi)\, d\theta d\rho d\phi.$$

(2 val.) (3) Mostre a desigualdade de Young: Sejam $\alpha, \beta > 1$ tais que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ dois parâmetros fixos. Mostre que para todos os $x, y > 0$ se tem

$$xy \leq \frac{1}{\alpha}x^\alpha + \frac{1}{\beta}y^\beta$$

Sugestão: Fixe um dos termos da desigualdade e aplique o método dos multiplicadores de Lagrange.

(2 val.) (4) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E^2} \frac{1 + (x^2 + y^2)^n}{1 + (x^2 + y^2)^{2n+2}}.$$

(2 val.) (5) Seja $f : E^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua então $\frac{\partial f}{\partial x}$ é diferenciável em ordem a y e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Sugestão: Comece por escrever f em termos de $\frac{\partial f}{\partial y}$ usando o teorema fundamental do cálculo.

(2 val.) (6) Seja $V = \{(x, y, z, w) \in E^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 < 1\}$. Calcule

$$\int_V \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}.$$

(2 val.) (7) Seja $M = \{(x, y, z, w) \in E^4 : x^2 + y^2 = 1, z = w^2\}$ com a orientação μ, que no ponto $(1, 0, 0, 0)$ é determinada pelo covector $dy \wedge dw$. Calcule

$$\int_{M^\mu} \frac{y}{1+z} dx \wedge dw.$$

(2 val.) (8) Seja U um aberto de E^n. Uma aplicação $\mathbf{g} : [a, b] \subset \mathbb{R} \to U$ de classe C^1 com $\mathbf{g}(a) = \mathbf{g}(b)$ diz-se um *caminho fechado em* U. Dois caminhos fechados $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1 : [a, b] \to U$ são *homotópicos* se existe uma aplicação de classe C^2

$$\mathbf{H} : [a, b] \times [0, 1] \to U$$

tal que $\mathbf{H}(t, 0) = \mathbf{g}_0(t)$, $\mathbf{H}(t, 1) = \mathbf{g}_1(t)$ e $\mathbf{H}(a, s) = \mathbf{H}(b, s)$ para todos os $s \in [0, 1], t \in [a, b]$. $\mathbf{H}$ diz-se uma *homotopia em* U entre os caminhos $\mathbf{g}_0$ e $\mathbf{g}_1$ e pode pensar-se em $\mathbf{H}$ como uma deformação em U do caminho $\mathbf{g}_0$ no caminho $\mathbf{g}_1$.

Define-se o integral de uma forma-1 ω ao longo de um caminho $\mathbf{g}$ por

$$\int_{\mathbf{g}([a,b])} \omega := \int_{[a,b]^+} \mathbf{g}^* \omega.$$

Mostre que se $\mathbf{g}_0$ e $\mathbf{g}_1$ são homotópicos em U, e ω é uma forma-1 fechada em U de classe C^1, então

$$\int_{\mathbf{g}_0([a,b])} \omega = \int_{\mathbf{g}_1([a,b])} \omega.$$

Sugestão: Aplique o teorema de Stokes a $\mathbf{H}^*\omega$.

(9) Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $S = \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = xy\}$ no sentido da normal com componente segundo z positiva.

(1 val.) (a) Usando o teorema da divergência.

(1.5 val.) (b) Usando o teorema de Stokes para campos vectoriais.

(1.5 val.) (10) Mostre que os abertos $U = \{(x, y, z) \in E^3 : z^2 < x^2 + y^2 \text{ ou } z < 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 > 1 + z^2\}$ não são difeomorfos.