Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TURMA ESPECIAL

PRIMEIRO EXAME (3H) E SEGUNDO TESTE [QUESTÕES 5 A 8] (1H30)

11 DE JANEIRO DE 2002

apresente e justifique todos os cálculos

(1) Considere o conjunto

$$M = \left\{(x, y, z) \in E^3 : z > 0, x + y^2 z + \log z = 0\right\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e escreva a equação do plano tangente a M no ponto $(-1, 1, 1)$.

(2 val.) (b) Mostre que numa vizinhança do ponto $(-1, 1, 1)$, M é dada pelo gráfico de uma função $z = f(x, y)$, e calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1)$.

Resolução:

(a) M é o gráfico da função $g(y, z) = -y^2 z - \log z$ sobre o conjunto aberto $\{(x, y, z) \in E^3 : z > 0\}$. Uma vez que g é de classe C^1 conclui-se que M é uma variedade-2 em E^3.

Um vector normal a M no ponto $(-1, 1, 1)$ é dado pelo gradiente da função $F(x, y, z) = x + y^2 z + \log z$ nesse ponto.

$$\nabla F = \left[\ 1 \quad 2yz \quad y^2 + \tfrac{1}{z}\ \right],$$

logo $\nabla F(-1, 1, 1) = (1, 2, 2)$ e a equação do plano tangente é:

$$(x + 1) + 2(x - 1) + 2(x - 1) = 0.$$

(b) M é o conjunto de nível 0 da função F de classe C^1 definida acima. Uma vez que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(-1, 1, 1) = 2 \neq 0$$

o teorema da função implícita garante que M é o gráfico de uma função de classe C^1, $f(x, y)$ numa vizinhança de $(-1, 1, 1)$. Derivando $x + y^2 f(x, y) + \log f(x, y) = 0$ em ordem a x obtemos

$$1 + y^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = 0$$

e substituindo em $(x, y) = (-1, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

(2 val.) (2) Mostre que se $x^1, \ldots, x^n > 0$ então a média geométrica de $x^1, \ldots, x^n$ é menor ou igual à média aritmética, isto é, que

$$\sqrt[n]{x^1 \ldots x^n} \leq \frac{x^1 + \ldots + x^n}{n}.$$

Sugestão: Fixe um dos termos da desigualdade e aplique o método dos multiplicadores de Lagrange.

Resolução: Seja $K > 0$. Basta mostrar que o máximo da função $f(x^1, \ldots, x^n) = x^1 \ldots x^n$ sobre o conjunto $P = \{(x^1, \ldots, x^n) \in E^n : x^1 + \ldots + x^n = nK, x^i > 0\}$ é $\geq K^n$. Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtem-se o sistema

$$\begin{cases} x^2 \ldots x^n + \lambda = 0 \\ \vdots \\ x^1 \ldots x^{n-1} + \lambda = 0 \\ x^1 + \ldots + x^n = nK \end{cases}$$

Das duas primeiras equações vem $x^2 \ldots x^n = x^1 x^3 \ldots x^n \implies x^1 = x^2$ uma vez que todos os x^i's são positivos. De forma análoga vê-se que $x^i = x^j$ para $i \neq j$ logo, substituindo na última equação vem $nx^1 = nK \Leftrightarrow x^1 = K$.

Portanto f tem um único ponto de estacionariedade sobre o conjunto P. Este ponto é necessáriamente um ponto de máximo de f porque, pelo teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em $\overline{P}$, e o mínimo é claramente 0 - o valor assumido por f em todos os pontos de $\overline{P} - P$.

Conclui-se que $f(x^1, \ldots x^n) \leq K^n$ em $\overline{P}$, o que conclui a demonstração.

(3) Escreva o seguinte integral em coordenadas cilíndricas em termos de um integral iterado em coordenadas esféricas. (2 val.)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_1^{\sqrt{2-z^2}} g(r, \theta, z) dr dz d\theta$$

Resolução: A região de integração é a região no primeiro octante limitada pelo plano $\theta = \frac{\pi}{4}$ (ou seja $x = y$), pelo cilindro $r = 1$ e pela superfície esférica $r = \sqrt{2 - z^2} \Leftrightarrow r^2 + z^2 = 2$ (uma vez que o cilindro e a esfera se intersectam em $z = 1$).

Em termos das coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ), temos $r = \rho \sin \phi, z = \rho \cos \phi, \theta = \theta$, logo a equação do cilindro é

$$\rho \sin \phi = 1$$

e a intersecção do cilindro com a superfície esférica $\rho = \sqrt{2}$ para $z > 0$ ocorre para

$$\rho \sin \phi = 1, \rho = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

logo a região de integração em coordenadas esféricas, escreve-se

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \ \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sin \phi} \leq \rho \leq \sqrt{2}.$$

Finalmente, temos de ter em conta os jacobianos das coordenadas esféricas e cilíndricas:

$$g(r, \theta, z) = \frac{g(r, \theta, z)}{r} r$$

pelo que a função integranda em coordenadas esféricas, escreve-se

$$\frac{g(\rho \sin \phi, \theta, \rho \cos \phi)}{\rho \sin \phi}$$

e o integral em coordenadas esféricas fica:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{\sin\phi}}^{\sqrt{2}} \frac{g(\rho\sin\phi,\theta,\rho\cos\phi)}{\rho\sin\phi}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{\sin\phi}}^{\sqrt{2}} g(\rho\sin\phi,\theta,\rho\cos\phi)\rho d\rho d\phi d\theta.$$

(2 val.) (4) Seja $A\subset E^n$ um conjunto mensurável. Se $f\in\mathcal{L}(A)$, define-se $||f||_1=\int_A|f|dV_n$. Mostre que se f_n é uma sucessão de Cauchy para esta norma em $\mathcal{L}(A)$, isto é, se

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_N\ p,q>N \implies ||f_p-f_q||_1<\epsilon$$

então existe uma subsucessão de f_n que converge para quase todo o $\mathbf{x}\in A$.

Sugestão: Recorde que se $\sum_{k=1}^{\infty}\int_A|g_k|<\infty$ então a série $\sum_{k=1}^{\infty}g_k(\mathbf{x})$ converge quase em toda a parte.

Resolução: Para cada k escolha-se N_k tal que $||f_p-f_q||_1<\frac{1}{2^k}$ para $p,q\geq N_k$. e considere-se a sucessão $g_k=f_{N_{k+1}}-f_{N_k}$. Então

$$\sum_{k=1}^{\infty}||g_k||_1\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1<+\infty$$

donde se conclui (pelo resultado recordado na sugestão) que

$$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)$$

converge para uma função $G(x)$ q.t.p. em A. Uma vez que

$$\sum_{k=1}^{m}g_k(x)=f_{N_{m+1}}-f_{N_1}$$

isto significa que a subsucessão $\{f_{N_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge q.t.p em A para a função $f_{N_1}(x)+G(x)$, o que conclui a demonstração.

(2 val.) (5) Seja $U=\{(x,y)\in E^2: x>0, y>0, x+y<1\}$. Calcule o integral

$$\int_U e^{-\frac{y-x}{y+x}}dxdy.$$

Resolução: Considere-se a mudança de coordenadas linear dada por

$$\begin{cases} u=y-x\\ v=y+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{v-u}{2}\\ y=\frac{u+v}{2}\end{cases}$$

Nas coordenadas (u,v), a região de integração U escreve-se

$$v-u>0\ ,u+v>0,\ ,v<1\Leftrightarrow 0<v<1,-v<u<v,$$

e o Jacobiano da transformação é

$$\frac{\partial(x,y)}{(u,v)}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

logo, pelo teorema de mudança de variável, tem-se

$$\begin{aligned}\int_U e^{-\frac{y-x}{y+x}}dxdy &= \int_0^1\int_{-v}^{v} e^{-\frac{u}{v}}\frac{1}{2}dudv\\ &= \int_0^1 \left[(-v)e^{-\frac{u}{v}}\right]_{-v}^{v}\frac{1}{2}dv\\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}v\left(e-\frac{1}{e}\right)dv\\ &= \frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

(2 val.) (6) Seja $M = \{(x,y,z)\in E^3 : x^2+y^2 = 1+z^2, 0<z<1, x>0\}$. Calcule

$$\int_M z dV_2.$$

Resolução: Em coordenadas cilíndricas, a hiperbolóide M escreve-se $r^2 = 1 + z^2,\ 0<z<1, -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. Uma parametrização para M é dada por exemplo, por $\mathbf{g} :]0,1[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to E^3$ definida por

$$\mathbf{g}(z,\theta) = (\sqrt{1+z^2}\cos\theta, \sqrt{1+z^2}\sin\theta, z).$$

Tem-se

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial z} = (\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\cos\theta, \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\sin\theta, 1)$$

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta} = (-\sqrt{1+z^2}\sin\theta, \sqrt{1+z^2}\cos\theta, 0)$$

logo

$$(D\mathbf{g})^t D\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{1+z^2}+1 & 0\\ 0 & 1+z^2\end{bmatrix}$$

e o pullback do elemento de volume é

$$\mathbf{g}^* dV_2 = \sqrt{\det(D\mathbf{g})^t D\mathbf{g}}\, dz\wedge d\theta = \sqrt{2z^2+1}\, dz\wedge d\theta.$$

Portanto

$$\int_M z dV_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 z\sqrt{2z^2+1}\,dzd\theta = \frac{\pi}{6}\left(2z^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(3\sqrt{3}-1).$$

(7) Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^2, y, 2x-z)$ e a superfície

$$S = \{(x,y,z)\in E^3 : y = 4-x^2-z^2, 0<y<3\}.$$

Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, no sentido da normal unitária exterior ao sólido limitado por S e pelos planos $y=0, y=3$.

(1.5 val.) (a) Usando o teorema da divergência.

(1.5 val.) (b) Usando o teorema de Stokes para campos vectoriais.

Resolução:

(a) O campo $\mathbf{F}$ é de classe C^1 e $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 + 1 - 1 = 0$. Seja V o sólido limitado por S e pelas porções de plano $T_1 = \{(x,0,z) \in E^3 : x^2 + z^2 \leq 4\}$ e $T_2 = \{(x,3,z) \in E^3 : x^2 + z^2 \leq 1$. Aplicando o teorema da divergência a V e $\mathbf{F}$ obtem-se

$$0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV_3 = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \int_{T_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \int_{T_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$$

onde $\mathbf{n}$ designa a normal unitária exterior. Em T_1 esta normal é dada por $\mathbf{n} = (0,-1,0)$ e em T_2 por $\mathbf{n} = (0,1,0)$ logo tem-se

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot n &= -\int_{T_1} -y dV_2 - \int_{T_2} y dV_2 \\ &= -\int_{T_2} 3 dV_2 \\ &= -3V_2(T_2) = -3\pi. \end{aligned}$$

(b) Uma vez que $\mathbf{F}$ está definido em E^3, que é um conjunto em estrela, e $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, existe um campo vectorial $\mathbf{A}$ definido em E^3 tal que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$.
O bordo de $\overline{S}$ é formado por duas circunferências $C_1 = \{(x,0,z) \in E^3 : x^2 + z^2 = 4\}$, e $C_2 = \{(x,3,z) \in E^3 : x^2 + z^2 = 1\}$ e aplicando o Teorema de Stokes obtem-se

$$\int_S \mathbf{F} \cdot n = \oint_{C_1} \mathbf{A} + \oint_{C_2} \mathbf{A}$$

onde, vistas do ponto $(0,10,0)$,C_1 é percorrida no sentido anti-horário e C_2 é percorrida no sentido horário.
Para determinar o potencial vector $\mathbf{A}$ temos de resolver a equação

$$d\left(A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz\right) = z^2 dy \wedge dz + y dz \wedge dx + 2x dx \wedge dy - z dx \wedge dy,$$

e dado que vamos integrar em linhas perpendiculares ao eixo dos yy, simplificaria as contas determinar $\mathbf{A}$ tal que a primeira ou a terceira componentes sejam nulas. Claramente $d\left(-\frac{z^3}{3} dy\right) = z^2 dy \wedge dz$, $d(zy dx) = y dz \wedge dx - z dx \wedge dy$ e $d(x^2 dy) = 2x dx \wedge dy$ logo podemos tomar para $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(x,y,z) = (zy, x^2 - \frac{z^3}{3}, 0).$$

Uma vez que a primeira componente de $\mathbf{A}$ se anula em C_1 podemos concluir imediatamente que

$$\oint_{C_1} \mathbf{A} = 0.$$

Uma parametrização de C_2 é dada por $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\to E^3$ definida pela expressão

$$\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, 3, \sin\theta)$$

Esta parametrização percorre C_2 no sentido pretendido. Como

$$\mathbf{g}'(\theta) = (-\sin\theta, 0, \cos\theta)$$

tem-se

$$\begin{aligned}\oint_{C_2} \mathbf{A} &= \int_0^{2\pi} (3\sin\theta, \cos^2\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}, 0)\cdot(-\sin\theta, 3, \cos\theta)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -3\sin^2\theta d\theta = -3\pi.\end{aligned}$$

(8) (a) Sejam $U \subset E^n, V \subset E^m$ abertos, $M \subset U, N \subset V$ variedades compactas de dimensões k e l, e com orientações μ e ν respectivamente. Sejam $\alpha \in \Omega^k(U), \beta \in \Omega^l(V)$, e $\pi_1 : U\times V \to U$ e $\pi_2 : U \times V \to V$ as projecções. Mostre que (1.5 val.)

$$\int_{M\times N^{\mu\wedge\nu}} \pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta = \left(\int_{M^\mu}\alpha\right)\left(\int_{N^\nu}\beta\right),$$

onde $\mu\wedge\nu$ designa a orientação de $M\times N$ tal que um elemento de volume dV_{k+l} para $M\times N$ é dado por $\pi_1^*dV_k\wedge\pi_2^*dV_l$ onde dV_k e dV_l são elementos de volume para M, N respectivamente.

(b) Dê um exemplo de uma forma-2 fechada e não exacta em $(E^2\setminus 0)\times(E^2\setminus 0)$. (1.5 val.)

Resolução:

(a) Sejam $\mathbf{f} : A \to U, \mathbf{g} : B \to V$ parametrizações de M e N respectivamente com $A \subset E^k, B \subset E^l$ abertos, induzindo as orientaçãoes μ e ν. Então $\mathbf{h} : A\times B \to U\times V$ definida por

$$\mathbf{h}(\mathbf{t},\mathbf{s}) = (\mathbf{f}(\mathbf{t}), \mathbf{g}(\mathbf{s}))$$

é uma parametrização para $M\times N$.

A orientação induzida por $\mathbf{h}$ é a da base

$$\left\{\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t^1},\dots,\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t^k},\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial s^1},\dots,\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial s^l}\right\} = \left\{(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t^1},0),\dots,(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t^k},0),(0,\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial s^1}),\dots,(0,\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial s^l})\right\}.$$

Aplicando $\pi_1^*dV_k\wedge\pi_2^*dV_l$ a esta base, obtem-se

$$dV_k\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t^1},\dots,\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t^l}\right)dV_l\left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial s^1},\dots,\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial s^l}\right) > 0$$

logo esta parametrização induz a orientação de $M\times N$ indicada no enunciado. Então

$$\int_{M\times N^{\mu\wedge\nu}} \pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta = \int_{A\times B^+}\mathbf{h}^*(\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta) = \int_{A\times B^+}\xi_1^*(\mathbf{f}^*\alpha)\wedge\xi_2^*(\mathbf{g}^*\beta)$$

onde designámos por ξ_1 e ξ_2 as projecções $\xi_1 : A\times B\to A$, e $\xi_2 : A\times B \to B$. Pelo teorema de Fubini, concluímos que

$$\int_{M\times N^{\mu\wedge\nu}} \pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta = \left(\int_{A^+}\mathbf{f}^*\alpha\right)\left(\int_{B^+}\mathbf{g}^*\beta\right) = \left(\int_{M^\mu}\alpha\right)\left(\int_{N^\nu}\beta\right),$$

o que conclui a demonstração.

(b) Sejam $U = V = E^2\setminus 0$, $M = \{(x,y)\in U : x^2+y^2 = 1\}$, $N = \{(z,w)\in V : z^2+w^2 = 1\}$, e considerem-se as formas-1

$$\alpha = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \in \Omega^1(U),$$

$$\beta = -\frac{w}{z^2+w^2}dz + \frac{z}{z^2+w^2}dw \in \Omega^1(V).$$

Sabemos que $d\alpha = d\beta = 0$ e que α, β não são formas exactas em U, V uma vez que orientando as circinferências M e N no sentido directo se tem

$$\int_M \alpha = \int_N \beta = 2\pi \neq 0.$$

Ora

$$\begin{aligned} d(\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta) &= d(\pi_1^*\alpha) \wedge \pi_2^*\beta - \pi_1^*\alpha \wedge d(\pi_2^*\beta) \\ &= \pi_1^*(d\alpha) \wedge \pi_2^*\beta - \pi_1^*\alpha \wedge (\pi_2^* d\beta) = 0 \end{aligned}$$

logo $\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta$ é uma forma-2 fechada em $U \times V$. Por outro lado, pela alínea anterior,

$$\int_{M\times N} \pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta = \pm 4\pi^2 \neq 0.$$

Uma vez que $M \times N$ é uma variedade-2 fechada, concluímos do Teorema de Stokes que

$$\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right) \wedge \left(-\frac{w}{z^2+w^2}dz + \frac{z}{z^2+w^2}dw\right)$$

é uma forma-2 em $(E^2 \setminus 0) \times (E^2 \setminus 0)$ que é fechada mas não exacta.