Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TURMA ESPECIAL

SEGUNDO EXAME (3H)

9 DE FEVEREIRO DE 2002

apresente e justifique todos os cálculos

(1) Considere a seguinte variedade-2 em E^4

$$W = \{(x, y, z, w) \in E^4 : xy = 1 + zw, x^2 + z^2 = wy\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que numa vizinhança do ponto $(1, 1, 0, 1)$ se pode usar (y, z) para parametrizar W.

(2 val.) (b) Calcule o espaço tangente a W nesse ponto.

(2 val.) (2) Determine todos os extremos locais da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no conjunto

$$\{(x, y) \in E^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(3) Considere a seguinte região

$$V = \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados em coordenadas cartesianas na ordem $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(2 val.) (b) Calcule as coordenadas do centróide de V.

(2 val.) (4) Mostre que a seguinte função é diferenciável no seu domínio:

$$\phi(s) = \int_{C_s^\mu} -ydx + xdy,$$

onde C_s é a variedade-1 parametrizada por $\mathbf{g}_s :]0, +\infty[\to E^2$ com g_s definida por

$$\mathbf{g}_s(\theta) = (\theta^s \cos\theta, \theta^s \sin\theta),$$

e μ é a orientação induzida pela parametrização $\mathbf{g}_s$.

(3 val.) (5) Considere a seguinte variedade-2 em E^3

$$M = \{(x, y, z) \in E^3 : x = u\cos z, y = u\sin z, \text{ com } z \in \mathbb{R}, u > 0\}.$$

Calcule

$$\int_{N^\mu} d\left(\frac{1}{1+z^2}(-ydx + xdy + dz)\right).$$

Onde N é a intersecção de M com o cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ e μ é a orientação que no ponto $(1, 0, 0)$ é determinada pelo covector-2 $dx \wedge dz$.

(2 val.) (6) O campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ definido pela expressão

$$\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+5, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{z-1}{y^2+(z-1)^2}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{y}{y^2+(z-1)^2}\right)$$

é fechado e solenoidal (i.e. $\nabla\times\mathbf{F}=0$ e $\nabla\cdot\mathbf{F}=0$) no seu domínio.
Mostre que, no entanto, $\mathbf{F}$ não é nem um gradiente nem um rotacional.

(7) Considere o conjunto de todas as curvas C da forma

$$C=\{(x,h(x)) : x\in[0,1], h:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ é de classe } C^2, h(0)=0, h(1)=1\}.$$

Assumindo que entre todas estas curvas, existe uma cujo comprimento é mínimo, mostre que esta curva é o segmento de recta que une $(0,0)$ a $(1,1)$ do seguinte modo:

Chamemos $l(x)$ à função tal que $(x,l(x))$ tem comprimento mínimo. Seja $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $g(0)=g(1)=0$ e seja C_α a curva parametrizada por $x\mapsto(x,l(x)+\alpha g(x))$.

(0.5 val.) (a) Escreva uma expressão para o comprimento $\phi(\alpha)$ de C_α.

(1 val.) (b) Que valor toma $\phi'(0)$?

(1.5 val.) (c) Utilize a alínea anterior e integração por partes para concluir que $l''=0$.