Análise Matemática III - Turma especial

Ficha 1

A entregar até quarta-feira, 26 de Setembro às 15h

1 *Uma função* $f : E^n \to E^1$ *diz-se* homogénea de grau m *se* $f(t\mathbf{x}) = t^m f(\mathbf{x})$ *para todo o* $\mathbf{x} \in E^n$. *Mostre que se* f *é diferenciável, então*

$$\sum_{i=1}^{n} x^i f_i(\mathbf{x}) = mf(\mathbf{x}).$$

2 *Uma sucessão* $\mathbf{x}_n \in E^k$ *diz-se uma* sucessão de Cauchy *se*

> *para todo o* $\epsilon > 0$, *existe* N, *tal que para todos os* $m, n > N$ *se tem* $|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n| < \epsilon$.

(a) Mostre que $\mathbf{x}_n$ *é uma sucessão de Cauchy se e só se cada uma das sucessões coordenadas* x_n^i *é uma sucessão de Cauchy.*

(b) Conclua que uma sucessão de Cauchy em E^k *é convergente.*

3 *Seja* $D \subset E^k$ *um conjunto fechado. Uma transformação* $T : D \to D$ *diz-se uma* contracção *se existe* $c < 1$ *tal que para todos os* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ *se tem* $|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})| \leq c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

(a) Mostre que uma contracção é uma transformação contínua.

(b) Mostre que uma contracção tem um único ponto fixo, *isto é, que existe um único* $\mathbf{z} \in D$ *tal que* $T(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$. Sugestão: Considere a sucessão $T^n(\mathbf{x})$ para um ponto qualquer $\mathbf{x} \in D$.

4 *Para cada uma das seguintes transformações* $f : S \to E^2$, *calcule o jacobiano* $J\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *e determine a imagem* $\mathbf{f}(S)$. *Determine também um subconjunto maximal* $T \subset S$ *onde* $\mathbf{f}$ *é injectiva e dê uma expressão para a transformação inversa* $\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{f}(T) \to T$.

(a) $S = E^2 \setminus 0$ *e* $\mathbf{f} : S \to E^2$ *é definida por* $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(b) $S = \{(x, y) \in E^2 | x > 0 \text{ e } y > 0\}$ *e* $\mathbf{f} : S \to E^2$ *é definida por* $\mathbf{f}(x, y) = (\log(xy), \frac{1}{x^2+y^2})$

5 *Recorde que um conjunto* $K \subset E^n$ *se diz* compacto *se é limitado e fechado. Uma família de conjuntos* $\{U_\alpha \subset E^n\}$ *diz-se uma* cobertura *de* $X \subset E^n$ *se* $X \subset \cup_\alpha U_\alpha$. *A cobertura diz-se* aberta *se cada um dos conjuntos* U_α *é aberto. Uma* subcobertura *de* $\{U_\alpha\}$ *é uma subfamília que é ainda uma cobertura.*

Mostre que um conjunto K *é compacto se e só se toda a cobertura aberta de* K *admite uma subcobertura finita.*