Análise Matemática III - Turma especial

Ficha 12

A entregar até quarta-feira, 12 de Dezembro às 15h

1 *Calcule os integrais das seguintes formas com a orientação indicada.*

(a) $xdx + ydy + zdz$ *ao longo de* $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 3y\}$ *com a curva orientada no sentido dos ponteiros do relógio quando vista do ponto* $(0, 0, 10)$.

(b) $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ *ao longo de* $\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *com a orientação que no ponto* $(0, 1, 0)$ *é determinada por* $dz \wedge dx$.

(c) $dz \wedge dw + xzdy \wedge dw$ *ao longo de* $\{(x, y, z, w) \in E^4 : x^2 + y^2 = 1, z^2 + w^2 = 1\}$ *com uma orientação à sua escolha.*

2 *(a) Seja* U *um aberto de* E^n, $f : U \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1, $C \subset U$ *uma variedade-1 e* $\mathbf{g} : [a, b] \to U$ *uma função de classe* C^1 *tal que* $\mathbf{g}|_{]a,b[} :]a, b[\to U$ *é uma parametrização de* C. *Seja* μ *a orientação de* C *induzida por esta parametrização,* $A = \mathbf{g}(a)$ *e* $B = \mathbf{g}(b)$.

Mostre o **Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha**

$$\int_A^B df \stackrel{def}{=} \int_{C^\mu} df = f(B) - f(A).$$

(b) Utilize a alínea anterior para concluir que a forma-1

$$-\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

não é exacta em $E^2 \setminus 0$.

(c) Considere uma região plana da forma

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in E^2 : f(x) < y < g(x), a < x < b\} \\ &= \{(x, y) \in E^2 : \phi(y) < x < \psi(y), c < y < d\} \end{aligned}$$

com f, g, ϕ, ψ *funções de classe* C^1. *Sejam* $P, Q : D \to \mathbb{R}$ *funções de classe* C^1, ∂D *a fronteira de* D *(uma variedade-1 excepto possívelmente num número finito de pontos) e* μ *a orientação de* D *no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.*

Utilizando o teorema fundamental do cálculo para funções de uma variável real, mostre que

$$\int_{\partial D^\mu} P dx = \int_{D^+} -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy$$

e que

$$\int_{\partial D^\mu} Q dy = \int_{D^+} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy.$$

Conclua que o **Teorema de Green** *é válido para regiões deste tipo. Isto é, que*

$$\int_{\partial D^\mu} P dx + Q dy = \int_{D^+} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy.$$

3 *Seja*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}.$$

Considere as cartas de S^2 dadas pela projecção estereográfica P e pela projecção cílindrica Q respectivamente.

(a) Mostre que se ω é o elemento de volume da esfera associado à orientação induzida pela parametrização Q^{-1} então

$$\left(Q^{-1}\right)^* \omega = d\theta \wedge dz.$$

Isto significa que a projecção cilíndrica preserva áreas.

(b) Calcule $(P^{-1})^*\omega$.

4 *(a) Calcule*

$$\int_A xy \; dV_2$$

para $A = \{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| < 1 + x\}$.

(b) Calcule o momento de inércia em relação ao eixo dos xx de um triângulo com densidade de massa 1, e vértices em $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

(c) Prove o **Segundo Teorema de Pappus***: a área de uma superfície de revolução gerada por uma curva plana é igual a $2\pi dL$ onde L é o comprimento da curva e d é a distância do centróide ao eixo de rotação.*

Aproveite este resultado para calcular a área da superfície de um toro com raios r_1 e r_2 e da superfície de um cone circular recto (excluindo a base) com raio r e altura h.

(d) Mostre que se $M = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$ com U um aberto de E^2 então a área de M é dada pela fórmula

$$\int_U \left(\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x}^2 + \frac{\partial f}{\partial y}^2} \right) dxdy.$$

Não são para entregar

5 **Fleming:** *Exercícios 8.3.3-5,7; 8.6.4; 8.7.2-10,12.*

6 *Mostre que a banda de Möbius não é orientável.*