Análise Matemática III - Turma especial

Ficha 13

A entregar até quarta-feira, 19 de Dezembro às 15h

1 *(a) Calcule o trabalho realizado pela força dada pela expressão* $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)$ *ao longo da curva formada pela intersecção da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *com o cilindro* $x^2 + y^2 = ax$ *onde* $z \geq 0$ *e* $a > 0$. *O caminho é atravessado numa direcção que parece a dos ponteiros do relógio quando visto de muito acima o plano* Oxy.

(b) A densidade de fluxo de um fluido é dada pela expressão $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, -2x - y, z)$. *Seja* S *o hemisfério* $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$. *Calcule a quantidade de massa de fluido que atravessa* S *por unidade de tempo no sentido da normal exterior.*

2 *Calcule* $\int_M \omega$ *com uma orientação à sua escolha (que deve especificar) utilizando o Teorema de Stokes.*

(a) $\omega = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy + dz$ *e* $M = \{(x,y,z) \in E^3 : y = x^2, z = \sin x, 0 < x < \pi\}$,

(b) $\omega = zdx \wedge dy$ *e* $M = \{(x,y,z) \in E^3 : z = x^2 + y^2, 1 < z < 4\}$,

(c) $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$ *e* $M = \{(x,y,z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$,

(d) $\omega = wdx \wedge dy \wedge dz$ *e* $M = \{(x,y,z,w) \in E^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 < w < 1\}$.

3 *Seja* $A \subset E^3$ *um conjunto. Define-se o* ângulo sólido subtendido por A *por* $\Omega(A) = \{t\mathbf{x} : t \in [0, +\infty[, \mathbf{x} \in A\}$. *A medida do ângulo sólido* $|\Omega(A)|$ *define-se como a área de* $\Omega(A) \bigcap \{(x,y,z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Seja S *uma superfície (uma variedade-2) contida no exterior da esfera de raio 1 com a seguinte propriedade: se uma recta que passa pela origem intersecta* S *então fá-lo num único ponto. Mostre que*

$$|\Omega(S)| = \int_S \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z) \cdot \mathbf{n}$$

onde $\mathbf{n}$ *é a normal unitária a* S *que aponta na direção oposta à origem.*

4 *Seja* $B(t) = \{\mathbf{x} \in E^n : |\mathbf{x}| \leq t\}$ *com* $t > 0$. *Seja* $f : E^n \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1 *e* $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$\phi(t) = \int_{B(t)} f dV_n.$$

Mostre que

$$\phi'(t) = \int_{\partial B(t)} f dV_{n-1}.$$

Que conclui no caso em que $f = 1$?

Não são para entregar

5 Fleming: *Exercícios 8.4.1-6; 8.8.1-4,7-8.*

6 Interpretação geométrica da derivada exterior. *Seja* $U \subset E^n$ *um aberto de* E^n, $\mathbf{x} \in U$ *e* $\omega \in \Omega^k(U)$. *Seja* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}\}$ *um conjunto de vectores de* E^n *e* A *a matriz* $n \times (k+1)$ *com* $a_{ij} = v^i_j$. *Mostre que*

$$d\omega(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}) = \sqrt{\det A^t A} \lim_{r \to 0} \frac{1}{V_{k+1}(B_r(\mathbf{x}))} \int_{\partial B_r(\mathbf{x})^\mu} \omega.$$

Onde $B_r(\mathbf{x})$ *designa a bola de raio* r *centrada em* $\mathbf{x}$ *no plano* $\{\mathbf{x} + t^1\mathbf{v}_1 + \ldots + t^{k+1}\mathbf{v}_{k+1} : t^i \in \mathbb{R}\}$ *e* μ *é a orientação induzida no bordo de* $B_r(\mathbf{x})$ *pela orientação do plano dada pela base* [1] $\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$.

Para $n = 3$, *escreva a fórmula anterior em termos de fluxos e integrais de linha de campos vectoriais para obter a interpretação geométrica de* div *e* rot.

7 Construção de uma partição da unidade para conjuntos não compactos. *Seja* $A \subset E^n$ *um conjunto qualquer e* $\mathcal{O}$ *uma cobertura aberta de* A. *Mostre que existe uma partição da unidade para* A *subordinada a cobertura* $\mathcal{O}$ *da seguinte forma:*

1. *Mostre que o resultado é verdade se* A *é aberto escrevendo* A *como a união de uma família* $K_1 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$ *de conjuntos compactos tais que* $\overline{K}_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$.

2. *Observe que se* $\mathcal{O} = \{U_i\}$ *então uma partição da unidade para* $U = \bigcup_i U_i$ *subordinada à cobertura* $\mathcal{O}$ *é também uma partição da unidade para* A *subordinada à mesma cobertura.*

[1] Se os vectores são linearmente dependentes ambos os lados da equação são 0