Análise Matemática III - Turma especial

Exercícios sobre o Teorema de Stokes

1 *Seja* $S = \{(x,y,z) \in E^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0\}$. *Utilizando o teorema de Stokes para campos vectoriais, calcule o fluxo do campo vectorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (0,2,0)$$

através de S *no sentido da normal que aponta para o interior do toro.*

2 *Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo vectorial* $\mathbf{F}(x,y,z,w) = (xe^z, -ye^z, -z, w)$ *através de* $M = \{(x,y,z,w) \in E^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 + w^2, -1 \leq w \leq 2\}$ *no sentido da normal que aponta na direcção do eixo* Ow.

3 *Calcule os seguintes integrais utilizando o teorema de Stokes.*

(a) $\int_{M^\mu} d\beta$ *onde* $M = \{(x,y,z,w) \in E^4 : x^2 + y^2 = 1, z^2 + w^2 = 1, x > 0, y > 0\}$, μ *é a orientação que no ponto* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 0)$ *é determinada pela forma* $dx \wedge dw$, *e* $\beta = wdz - zdw$.

(b) $\int_{M^\mu} d\alpha$ *onde* $M = \{(x,y,z,w) \in E^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 + w^2,\ 0 < w < 1\}$, *a orientação* μ *é a determinada pela normal à hipersuperfície que aponta na direcção contrária à do eixo* Ow, *e*

$$\alpha = xwdy \wedge dz + yw^2 dz \wedge dx + zwdx \wedge dy - dx \wedge dw.$$

(c) $\int_{U^+} d\alpha$ *onde* $U = \{(x,y,z) \in E^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ *e*

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dy \wedge dz + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz \wedge dx + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx \wedge dy.$$

Note que não pode aplicar o teorema de Stokes directamente.

4 *Seja* $\rho = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}$.

(a) Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\omega = \frac{x^1}{\rho^\alpha} dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\rho^\alpha} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$$

é uma forma fechada.

(b) Seja $S = \{(x^1, \ldots x^n) \in E^n : (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 100\}$, *e* $\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \omega(\mathbf{y} - \mathbf{x})$. *Calcule*

$$\int_S \omega_{\mathbf{e}_1} - \omega_{2\mathbf{e}_2}$$

onde a orientação de S *é a que é determinada no ponto* $10\mathbf{e}_1$ *pelo covector* $dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

5 *Determine todos os valores possíveis do integral* $\oint_C \omega$ *onde*

(a) $\omega = \left(-\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2} + x\right) dx + \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+(y+1)^2} + y\right) dy$ *e* C *é uma variedade-*1 *fechada contida em* $E^2 \setminus \{(0,0),(0,-1)\}$,

(b) $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ *e* C *é uma variedade-*1 *fechada contida em* $E^3 \setminus \{(0,0,z) \in E^3 : z \in \mathbb{R}\}$.

6 *(a) Mostre que a forma*

$$\alpha = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dy \wedge dz + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz \wedge dx + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx \wedge dy$$

não é exacta em $E^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

(b) Utilize a alínea anterior para concluir que não pode existir um difeomorfismo $\phi : E^3 \to E^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

7 *Mostre que não existe um difeomorfismo entre* E^3 *e* $E^3 \setminus \{(0,0,z) \in E^3 : z \in \mathbb{R}\}$.