Análise Matemática III - Turma especial

Ficha 3

A entregar até quarta-feira, 10 de Outubro às 15h

1 *Seja* $F : E^4 \to E^2$ *a função definida por*

$$F(x, y, z, w) = (x^2 + y^2 - w^2, e^y + 2xz).$$

(a) Determine o conjunto dos pontos em torno dos quais o sistema $F(x, y, z, w) = (-1, 1)$ *determina* (y, w) *como uma função de classe* C^∞ *de* (x, z).

(b) Sendo $g(x, z)$ *a função definida implicitamente pelo sistema em torno do ponto* $(0, 0, 0, 1)$. *Calcule* $g_1^2(0, 0)$.

2 *(a) Mostre que o intervalo* $M = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \subset E^2$ *não é* [1] *uma variedade de dimensão 1 em* E^2.

(b) Dê um exemplo de uma variedade M *de dimensão 1 em* E^2 *para a qual não existe nenhuma função* $\phi : E^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *tal que* $M = \{\mathbf{x} \in E^2 : \phi(x) = 0\}$.

3 *Para cada um dos seguintes conjuntos* M, *determine se* M *é ou não uma variedade. Caso não seja, indique um subconjunto maximal de* M *que seja uma variedade. Em qualquer dos casos (excepto na última alínea) esboce* M.

(a) $M = \{(x, y) \in E^2 | \ y = |x|\}$

(b) $M = \{(x, y) \in E^2 | \ \cos(x - y) = 1\}$,

(c) $M = \{(x, y, z) \in E^3 | \ xy = xz = 0\}$,

(d) $M = \{(x, y, z) \in E^3 | \ y^2 = (x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} + x^2 + z^2\}$,

(e) $M = P \times Q \subset E^{n+m}$, *o produto cartesiano de uma variedade* P *de dimensão* p *em* E^n *com uma variedade* Q *de dimensão* q *em* E^m.

4 *O espaço vectorial das matrizes* 3×3 *de entradas reais* $M_3(\mathbb{R})$ *pode ser identificado com* E^9 *de forma natural. Considere o subconjunto de* E^9

$$M = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t A = I\}$$

formado pelas matrizes 3×3 *ortogonais. Mostre que* M *é uma variedade compacta* [2] *de classe* C^∞.

---

[1] No entanto, M é o que se chama uma *variedade com bordo* de que falaremos mais tarde.
[2] Uma variedade diz-se compacta se é um subconjunto compacto de E^n.