Análise Matemática III - Turma especial

Ficha 5

A entregar até quarta-feira, 24 de Outubro às 15h

1 *Seja $\mathcal{E}$ a álgebra dos subconjuntos elementares de E^n e $V_n : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ a função aditiva definida na aula (e no exercício 5 abaixo que deve utilizar). Mostre a partir da definição de medida exterior que $\overline{V}_n(E) \geq V_n(E)$.*

Sugestão: *Use o teorema de Heine-Borel (exercício 5 da Ficha 1).*

2 *Seja $\mathcal{U}$ uma σ-álgebra e $\phi : \mathcal{U} \to [0, +\infty]$ uma função σ-aditiva. Sejam $A_j \in \mathcal{U}$.*

(a) Mostre que $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{U}$.

(b) Mostre que se $\phi(A_1) < +\infty$ e $A_{j+1} \subset A_j$ então $\phi(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j \to \infty} \phi(A_j)$.

(c) Mostre por meio de um exemplo que a condição $\phi(A_1) < +\infty$ não pode ser omitida na alínea anterior.

3 *Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Dê um exemplo de um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{Q} \subset U$ e $V_1(U) \leq \epsilon$.*

Sugestão: *Considere uma enumeração dos racionais.*

Basta entregar um dos seguintes dois problemas

4 *O conjunto de Cantor C é a intersecção dos seguintes conjuntos:*

$$F_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \bigcup [\tfrac{2}{3}, 1]$$
$$F_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \bigcup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \bigcup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \bigcup [\tfrac{8}{9}, 1]$$
$$\cdots$$

Isto é, F_{n+1} obtém-se de F_n retirando o terço do meio de cada um dos intervalos que forma F_n.

(a) Mostre que C é não numerável. Sugestão: *O que pode dizer sobre a expansão de um elemento de C em base 3?*

(b) Calcule a medida de C.

5 *Considere a seguinte relação de equivalência [1] em $\mathbb{R}$: $x \sim y$ sse $x - y \in \mathbb{Q}$. Seja $E \subset [0, 1]$ um conjunto formado escolhendo um representante de cada classe*

[1] Uma relação de equivalência $\sim$ num conjunto X é uma relação satisfazendo para todos os $x, y, z \in X$ as seguintes propriedades:

(i) $x \sim x$,

(ii) $x \sim y \implies y \sim x$,

(iii) $x \sim y, y \sim z \implies x \sim z$.

A classe de equivalência de um elemento $x \in X$ define-se como $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$. Se $y \in [x]$ diz-se que y é um representante de $[x]$. As classes de equivalência formam uma partição de X em conjuntos disjuntos. O conjunto de todas as classes de equivalência designa-se por conjunto quociente e escreve-se $X/\sim$.

de equivalência no intervalo $[0,1]$. *A existência de* E *é assegurada por um axioma da teoria dos conjuntos chamado o axioma da escolha.*

(a) Seja $\{q_n\}$ *uma enumeração dos racionais do intervalo* $[-1,1]$. *Mostre que*

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} q_n + E \subset [-1,2].$$

(b) Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *a família de todos os subconjuntos de* $\mathbb{R}$. *Mostre que não existe nenhuma função* σ*-aditiva* $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ *tal que* $\phi([0,1]) = 1$ *e* $\phi(x+A) = \phi(A)$.

(c) Mostre que $E \notin \mathcal{M}$ *(isto é,* E *não é mensurável).*

Não são para entregar

Os seguintes exercícios destinam-se (junto com o exercício 2 acima) a completar as demonstrações que temos feito na aula e a demonstrar a equivalência entre as nossas definições e as do Fleming.

6 *Seja* $\mathcal{E}$ *a família dos subconjuntos elementares de* E^n. *Isto é,* $E \in \mathcal{E}$ *sse* $E = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ *com* I_k *intervalos de* E^n.

(a) Mostre que $\mathcal{E}$ *é uma álgebra de conjuntos.*

(b) Mostre que a medida de Lebesgue definida em $\mathcal{E}$ *por*

$$V_n(\bigcup_{k=1}^{N} I_k) = \sum_{k=1}^{N} V_n(I_k)$$

para I_k *intervalos disjuntos está bem definida e determina uma função aditiva em* $\mathcal{E}$.

7 *Neste exercício,* μ^* *designa a medida exterior de Lebesgue que definimos na aula e* $\overline{V}$ *designa a medida exterior de Lebesgue conforme definida no Fleming. A palavra mensurável em baixo significa mensurável no sentido da aula, isto é,* $A \subset E^n$ *é mensurável sse*

$$\forall_{\delta>0}\ \exists\ I_k \text{ intervalos de } E^n\ :\ \mu^\star(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \triangle A) < \delta.$$

(a) Mostre que se U *é um aberto,* $\overline{V}(U) = \mu^\star(U)$.

(b) Mostre que A *é mensurável sse para todo o* $\delta > 0$ *existe um aberto* $U \supset A$ *tal que* $\mu^\star(U \setminus A) < \delta$. *Conclua (veja o Corolário 1, página 174 e a definição de mensurável para conjuntos ilimitados na página 176) que* A *é mensurável sse é mensurável no sentido do Fleming.*

(c) Conclua de (a) e (b) que $\overline{V} = \mu^*$ *em* $\mathcal{M}$.

8 Fleming: *Exercício 5.2.10.*