# Análise Matemática III - Turma especial

## Ficha 6

**A entregar até quarta-feira, 31 de Outubro às 15h**

**1** *Seja $A \in \mathcal{M}$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$ duas funções em $\mathcal{L}(A)$. Mostre as seguintes propriedades do integral de Lebesgue.*

*(a) (Linearidade) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(A)$ e $\int_A (\alpha f + \beta g) dV_n = \alpha \int_A f dV_n + \beta \int_A g dV_n$.* Sugestão: Reduza o exercício a demonstrar que $\int_A f + \int_A g = \int_A f + g$ para funções $f, g \geq 0$ e use o teorema da convergência monótona.

*(b) $\left| \int_A f dV_n \right| \leq \int_A |f| dV_n$.*

**2** *Diz-se que uma afirmação $P(x)$ sobre os pontos de um conjunto $A \subset E^n$ é válida* quase em toda a parte *(abreviado q.t.p.) se $P(x)$ é válida para todo o $x \in A \setminus B$ onde $B \subset A$ tem medida nula.*

*(a) Mostre que quase todos os pontos de $E^n$ têm todas as coordenadas irracionais.*

*(b) Seja $A \in \mathcal{M}$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$ tais que $g = f$ q.t.p. Mostre que $f$ é mensurável sse $g$ é. Além disso $f \in \mathcal{L}(A)$ sse $g \in \mathcal{L}(A)$ e nesse caso $\int_A f = \int_A g$.*

Nota: O exercício anterior mostra que para falar do integral ou de mensurabilidade de uma função num conjunto $A$ basta que ela esteja definida q.t.p em $A$.

*(c) Se $\int_B f dV_n = 0$ para todo o $B \subset A$ mensurável, então $f = 0$ q.t.p.*

**3** *(a) Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis tais que $g \neq 0$ q.t.p em $A$ então $\frac{f}{g}$ é mensurável em $A$.*

*(b) Seja $A \in \mathcal{M}$ um subconjunto de $E^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Mostre que o gráfico de $f$ (em $E^{n+1}$) tem medida nula.* Sugestão: Considere primeiro o caso em que a função é limitada e está definida num conjunto com medida finita.

**4** *Para cada um dos seguintes integrais iterados, esboce o domínio de integração e inverta a ordem de integração.*

*(a)* $\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{x+y} dz \right) dy \right) dx$.

*(b)* $\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x^2+y^2} dz \right) dy \right) dx$.