Análise Matemática III - Turma especial

Ficha 7

A entregar até quarta-feira, 7 de Novembro às 15h

1 *(a) Determine o centróide de* $\Delta^n = \{\mathbf{x} \in E^n : \sum_{i=1}^n x^i \leq 1, x^i \geq 0\}$.

(b) Calcule o volume da região

$$V = \{(x,y,z) \in E^3 \mid 0 \leq z \leq \frac{x^2+y^2}{xy}, 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}.$$

2 *Seja* $f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. *Mostre que os integrais*

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_0^1 f(x,y)\ dx \right) dy \quad e \quad \int_0^1 \left(\int_1^{+\infty} f(x,y) dy \right) dx.$$

existem mas são diferentes. Que pode concluir quanto à integrabilidade de f *em* $[0,1] \times [1,+\infty[$*?*

3 *Determine quais dos seguintes integrais existem (isto é, estão definidos e não são infinitos).*

(a) $\int_1^{+\infty} (t \sin(\frac{1}{t}) - 1)\ dt$,

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(|x|+1)}\ dx$,

(c) $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-|x-y|}}{1+|x-y|^2} dV_2$.

4 *(a) Seja* A *um conjunto mensurável e* f_k *uma sucessão de funções em* $L(A)$ *tais que* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_A |f_k| < \infty$. *Mostre que* $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *está definida q.t.p. em* A *e que* $\int_A F = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k$.

(b) Utilize a alínea anterior para exprimir $\int_0^a e^{-x^2} dx$ *como a soma de uma série* $(a > 0)$.

Não são para entregar

5 Fleming: *Exercícios 5.5.1-6; 5.6.1-9,12; 5.11.2,4-7,9,10*

Os seguintes exercícios destinam-se a demonstrar a igualdade do integral de Lebesgue que definimos na aula e do integral de Lebesgue conforme definido no Fleming. Demonstra-se também o teorema de Fubini, e a mensurabilidade do conjunto limitado pelo gráfico de uma função mensurável positiva.

6 *Seja* $A \in \mathcal{M}$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável. Mostre que* f *é integrável no sentido do Fleming sse é integrável no sentido da aula e que as duas definições de integral coincidem.* Sugestão: As noções coincidem para funções simples (Exercício 7 da ficha 5). Aplique os teoremas de convergência.

7 *Mostre que se $A \subset E^n$ é mensurável e $f : A \to \mathbb{R}_0^+$ é uma função mensurável então o conjunto*

$$B = \{(\mathbf{x}, y) \in E^{n+1} \ : \ \mathbf{x} \in A, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

é um subconjunto mensurável de E^{n+1}. Sugestão: Comece por demonstrar o resultado para funções características de conjuntos mensuráveis usando a definição de mensurabilidade.

8 *Seja f_k uma sucessão monótona (crescente ou decrescente) de funções em $L(A)$ com $A \in \mathcal{M}$. Mostre que se $\int_A f_k$ é uma sucessão limitada então $f_k(x)$ converge (para um número finito) q.t.p. em A.*

9 *Seja $A \subset E^{n+m}$ um conjunto de medida nula. Mostre que para quase todo o $\mathbf{x} \in E^n$ o conjunto $A_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in E^m : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A\}$ tem medida nula.* Sugestão: Dados intervalos $I_k \subset E^n, \ J_k \subset E^m$ tais que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (I_k \times J_k) \supset A \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} V_n(I_k) V_m(J_k) \leq \epsilon$$

considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} V_m(J_k) \chi_{I_k}(\mathbf{x})$. O exercício anterior garante que a série define uma função $f(\mathbf{x})$ q.t.p em E^n. Use os factos que $\overline{V}_m(A_{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$ nos pontos em que f está definida e que $\int_{E^n} f \leq \epsilon$ para concluir o resultado pretendido.

10 *Uma função $s : I \subset E^n \to \mathbb{R}$ com I um intervalo, diz-se uma* função em escada *se existe uma partição do intervalo I em subintervalos tal que s é constante em cada subintervalo da partição. O conjunto das funções integráveis $f : I \to \mathbb{R}_0^+$ tais que existe uma sucessão crescente de funções em escada $s_k : I \to \mathbb{R}_0^+$ convergindo para f q.t.p. em I escreve-se $U(I)$.*

(a) Sejam $A \subset E^n, B \subset E^m$ intervalos. Mostre o teorema de Fubini para funções $f \in U(A \times B)$. Sugestão: Pelo exercício anterior para quase todo o $\mathbf{x} \in A$, $s_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para quase todo o $\mathbf{y} \in B$. A sucessão $g_k(\mathbf{x}) = \int_B s_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ converge q.t.p em A pelo exercício 8. Pelo Teorema da convergência monótona o limite tem de ser $\int_B f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$. Basta agora aplicar o Teorema da convergência monótona à sucessão g_k.

(b) Mostre que qualquer função $f \in L(A \times B)$ se pode escrever na forma $f = u - v$ com $u, v \in U(A \times B)$, provando assim o teorema de Fubini.

Sugestão: Seja D(I) o conjunto das funções que se podem escrever na forma $u - v$ com $u, v \in U(I)$.

(i) Mostre que se $f_k \in U(I)$ é uma sucessão crescente de funções tal que $\int_I f_k$ é limitada, então $\lim f_k \in U(I)$.

(ii) Mostre que se $f \in D(I)$ é tal que $f \geq 0$ então para todo o $\epsilon > 0$ existem $u, v \in U(I)$ tais que $f = u - v$ e $\int_I v < \epsilon$.

(iii) Se $f_k \in D(I)$ é uma sucessão monótona crescente em $D(I)$ tal que a sucessão $\int_I f_k$ é limitada, então $\lim f_k \in D(I)$. (Considere a sucessão $f_2 - f_1, f_3 - f_2, \ldots$, escreva $f_k - f_{k-1} = u_k - v_k$ com $u_k, v_k \in U(I)$ e $\int_I v_k < \frac{1}{2^k}$ e aplique (i) a $\sum_{k=2}^{\infty} u_k$ e $\sum_{k=2}^{\infty} v_k$.)

(iv) Se $f_k \in D(I)$ é uma sucessão monótona decrescente em $D(I)$ tal que a sucessão $\int_I f_k$ é limitada, então $\lim f_k \in D(I)$

(v) Se U é um conjunto aberto com medida finita e $I \supset U$ é um intervalo, então $\chi_U \in U(I)$.

(vi) Se A é um conjunto mensurável com medida finita e $I \supset U$ é um intervalo, então $\chi_A \in D(I)$. (Use o exercício 7 (b) da ficha 5).

(vii) Dada $f \in L(A \times B)$, aplique (iii) e (iv) a sucessões de funções simples convergindo para f^+ e f^-.