Análise Matemática III - Turma especial

Ficha 8

A entregar até quarta-feira, 14 de Novembro às 15h

1 *Considere as funções definidas em* $\mathbb{R}$ *por*

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad e \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}dt.$$

(a) Mostre que $f^2(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ *para todo o* $x \in \mathbb{R}$.

(b) Utilize a alínea anterior para concluir que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2 *Mostre que a função*

$$f(x,y) = e^{-xy}\sin x \sin y$$

é integrável em $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.
Sugestão: Considere a mudança de variável $u = xy,\ v = \frac{y}{x}$.

3 *Seja* $A \subset E^n$ *um conjunto mensurável com medida finita. O* cone em A *com vértice* $h\mathbf{e}_{n+1}$ *é o conjunto*

$$C = \{(a^1(1-t), \ldots, a^n(1-t), ht) \in E^{n+1} : \mathbf{a} \in A, t \in [0,1]\}$$

Prove que

$$V_{n+1}(C) = \frac{h}{n+1}V_n(A).$$

Sugestão: Considere uma mudança de variável apropriada.

4 *Seja* $B^n(a) = \{\mathbf{x} \in E^n : |\mathbf{x}| \leq a\}$ *com* $a > 0$. *Calcule a medida de* $B^n(a)$ *da seguinte forma:*

(a) Mostre que $V_n(B^n(a)) = a^n V_n(B^n(1))$.

(b) Utilizando coordenadas polares nas duas primeiras variáveis, obtenha uma expressão para $V_n(B^n(a))$ *em termos de* $V_{n-2}B^{n-2}(1)$.

Não são para entregar

5 Fleming: *Exercícios 5.9.1-10, 5.12.1-3,6-9.*