Análise Matemática III - Turma especial

Ficha 9

A entregar até quarta-feira, 21 de Novembro às 15h

1 *Recorde que* $\{\mathbf{e}_i : i = 1, \dots n\}$ *denota a base canónica de* E^n *e* $\{\mathbf{e}^i : i = 1, \dots n\}$ *a base dual de* $(E^n)^\star$. *Dado um vector em* E^3

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3$$

definimos o 1*-covector*

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1\mathbf{e}^1 + v^2\mathbf{e}^2 + v^3\mathbf{e}^3$$

e o 2*-covector*

$$\Omega_{\mathbf{v}} = v^1\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 + v^2\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1 + v^3\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2.$$

Mostre que

(a) $\omega_{\mathbf{v}} \wedge \omega_{\mathbf{w}} = \Omega_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}$, *onde* $\times$ *designa o produto externo de vectores em* E^3.

(b) $\omega_{\mathbf{v}} \wedge \Omega_{\mathbf{w}} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3$.

2 *Sejam* V, W *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{R}$ *com base* $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *e* $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$. *Sejam* $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ *e* $\{\psi^1, \dots, \psi^m\}$ *as bases duais para* V^* *e* W^*. *Seja* $f : V \to W$ *uma aplicação linear cuja expressão em termos das bases acima é*

$$f(\mathbf{v}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_i^j \mathbf{w}_j.$$

(a) Escreva a expressão para a aplicação induzida por f *entre covectores, isto é, para o pullback* $f^* : W^* \to V^*$ *em termos das bases duais. Qual é a relação entre as matrizes que representam* f *e* f^**?*

(b) Escreva a expressão para o pullback $f^* : \mathcal{T}^k(W) \to \mathcal{T}^k(V)$ *em termos das bases* $\{\varphi^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi^{i_k}\}$ *e* $\{\psi^{j_1} \otimes \cdots \otimes \psi^{j_k}\}$.

Um vector $\mathbf{v} \in V$ *determina um elemento* $\Theta_{\mathbf{v}} \in (V^*)^*$ *do dual de* V^* *da seguinte forma:*

$$\Theta_{\mathbf{v}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{v})$$

(c) Mostre que $\{\Theta_{\mathbf{v}_1}, \dots \Theta_{\mathbf{v}_n}\}$ *formam uma base para* $(V^*)^*$ *que é precisamente a base dual de* $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$, *e portanto a aplicação* $V \to (V^*)^*$ *definida por* $\mathbf{v} \to \Theta_{\mathbf{v}}$ *é um isomorfismo de espaços vectoriais (isto é uma aplicação linear bijectiva).*

É usual utilizar esta aplicação para identificar os espaços V *e* $(V^*)^*$. *Um* tensor-k contravariante *é um elemento de* $\mathcal{T}^k(V^*)$. *Em particular, os tensores-*1 *contravariantes identificam-se com os vectores de* V.

(d) *Mostre que a aplicação linear* $f : V \to W$ *induz uma aplicação (chamada o push-forward por* f*)* $f_* : \mathcal{T}^k(V^*) \to \mathcal{T}^k(W^*)$ *e escreva a expressão de* f_* *em termos das bases* $\{\mathbf{v}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{i_k}\}$ *de* $\mathcal{T}^k(V^*)$ *e* $\{\mathbf{w}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{w}_{j_k}\}$ *de* $\mathcal{T}^k(W^*)$.

A razão porque os tensores se chamam covariantes e contravariantes é porque uma aplicação linear induz transformações em sentidos contrários nos dois tipos de tensor. Os covariantes transformam-se como os covectores e os contravariantes como os vectores.

Também se definem tensores k *vezes covariantes e* l *vezes contravariantes. Trata-se de aplicações multilineares* $V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}$ *(*V *aparece* k *vezes e* V^* *aparece* l *vezes). Por exemplo, uma aplicação linear* $f : V \to V$ *pode identificar-se (isto é o espaço vectorial das transformações lineares de* V *em* V *é isomorfo ao espaço vectorial formado por estes tensores) com um tensor* T *1 vez covariante e 1 vez contravariante definido por* $T(v, \varphi) = \varphi(f(v))$.

3 *Em seguida, quando se diz "Escreva uma expressão para o integral em termos de integrais iterados", quer-se dizer "Escreva uma expressão para o integral em termos de somas de integrais iterados em que os limites de integração são expressões em termos de funções elementares (não se pode usar* max *ou* min *ou* $|\cdot|$*) das variáveis tais que o limite inferior é menor ou igual ao limite superior".*

Escreva uma expressão para os seguintes integrais em termos de integrais iterados na ordem indicada.

(a) $\int_V 1$ *onde* $V = \{(x,y,z) \in E^3 \ : \ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$ *na ordem* $\int(\int(\int dy)dz)dx$ *(desenhe também os cortes para* x *constante).*

(b) $\int_V 1$ *onde* $V = \{(x,y,z) \in E^3 : x+y+z \ge 1,\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x,y,z \ge 0\}$ *numa ordem qualquer.*

(c) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2-y^2}^{1} 1 \ dz \ dy \ dx$ *na ordem* $\int(\int(\int dy)dz)dx$.

(d) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2-y^2}^{1} 1 \ dz \ dy \ dx$ *na ordem* $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(e) $\int_V 1$ *onde*

$$V = \{(x,y,z,w) \in E^4 \ : \ (x-1)^2+y^2+z^2+w^2 \ge 1, 0 \le x \le 3-(y^2+z^2+w^2)\}$$

na ordem $\int(\int(\int(\int dy)dx)dz)dw$.

4 *Calcule o volume dos seguintes sólidos:*

(a) S *é a região limitada pelas superfícies* $z = \sqrt{x^2+4y^2}$ *e* $z = 2-(2x^2+8y^2)$,

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-1)^2+z^2 < 1 \ , \ (x-1)^2+y^2+z^2 < 2\}$,

(c) S *é a união de dois cilindros de altura 1 e diâmetro 1 cujos eixos se intersectam perpendicularmente nos seus pontos médios.*