Análise Matemática III - Turma especial

Fichas 1 a 5 - Solução parcial

1.3 Seja $D \subset E^k$ um conjunto fechado. Uma transformação $T : D \to D$ diz-se uma *contracção* se existe $c < 1$ tal que para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ se tem $|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})| \leq c|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

(a) Mostre que uma contracção é uma transformação contínua.

(b) Mostre que uma contracção tem um único *ponto fixo*, isto é, que existe um único $\mathbf{z} \in D$ tal que $T(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$.

Solução:

(a) Se $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon$, então $|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})| < c\epsilon < \epsilon$ logo T é contínua.

(b) Por indução mostra-se que $|T^n(\mathbf{x}) - T^n(\mathbf{y})| < c^n|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Em particular, $|T^{n+1}(\mathbf{x}) - T^n(\mathbf{x})| < c^n|T(\mathbf{x}) - \mathbf{x}|$. Assim, dado $m > n$, tem-se

$$|T^m(\mathbf{x}) - T^n(\mathbf{x})| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |T^{j+1}(\mathbf{x}) - T^j(\mathbf{x})| \leq \sum_{j=n}^{m-1} c^j |T(\mathbf{x}) - \mathbf{x}| \leq \frac{c^n}{1-c}|T(\mathbf{x}) - \mathbf{x}|$$

Uma vez que $\frac{c^n}{1-c} \to 0$ quando $n \to \infty$, conclui-se que a sucessão $T^n(\mathbf{x})$ é uma sucessão de Cauchy (qualquer que seja $\mathbf{x} \in D$) e portanto converge. Fixe-se $\mathbf{x} \in D$ e seja $\mathbf{z} = \lim T^n(\mathbf{x})$. Uma vez que D é fechado, $\mathbf{z} \in D$. Como T é contínua tem-se

$$T(\mathbf{z}) = T(\lim T^n(\mathbf{x})) = \lim T^{n+1}(\mathbf{x}) = \lim T^n(\mathbf{x}) = \mathbf{z},$$

isto é, $\mathbf{z}$ é um ponto fixo de T em D.

Se $w \in D$ um ponto fixo qualquer de T. Então

$$|\mathbf{w} - \mathbf{z}| = |T(\mathbf{w}) - T(\mathbf{z})| \leq c|\mathbf{w} - \mathbf{z}|.$$

Como $c < 1$ conclui-se que $|\mathbf{w} - \mathbf{z}| = 0$, ou seja, existe um único ponto fixo de T em D.

1.5 Recorde que um conjunto $K \subset E^n$ se diz *compacto* se é limitado e fechado. Uma família de conjuntos $\{U_\alpha \subset E^n\}$ diz-se uma *cobertura* de $X \subset E^n$ se $X \subset \cup_\alpha U_\alpha$. A cobertura diz-se *aberta* se cada um dos conjuntos U_α é aberto. Uma *subcobertura* de $\{U_\alpha\}$ é uma subfamília que é ainda uma cobertura.

Mostre que um conjunto K é compacto se e só se toda a cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.

Solução (do Ricardo Joel): Suponhamos que $K \subset E^n$ é tal que toda a cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita. A família $\{B_n(\mathbf{0})\}$ é uma cobertura aberta de E^n e portanto de K. Sendo N o maior dos raios das bolas de uma subcobertura finita, tem-se $K \subset B_N(\mathbf{0})$ pelo que K é limitado.

Vamos agora ver que K é fechado. Suponhamos que existe um ponto $\mathbf{x}$ que está na fronteira de K mas não em K. Então $\{E^n \setminus \overline{B_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x})}\}$ é uma cobertura aberta de K. Tomando uma subcobertura finita segue-se que existe N tal que $K \cap B_{\frac{1}{N}}(\mathbf{x}) = \emptyset$. Isto contradiz a hipótese de $\mathbf{x}$ ser um ponto fronteiro. Conclui-se que a fronteira de K está contida em K, ou seja K é fechado.

Suponhamos agora que K é limitado e fechado. Começamos por provar o resultado pretendido para uma cobertura particular de K, nomeadamente a cobertura $\{B_\epsilon(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in K\}$ onde $\epsilon > 0$ é um número fixo. Suponhamos que esta cobertura não tem nenhuma subcobertura finita. Então podemos escolher uma sucessão de pontos $\mathbf{x}_n \in K$ com a propriedade

$$\mathbf{x}_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_\epsilon(\mathbf{x}_k).$$

Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, a sucessão $\mathbf{x}_n$ tem uma subsucessão convergente em D. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{z}$. Sendo N tal que $\mathbf{x}_n \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(\mathbf{z})$ para $n \geq N$, segue-se que $\mathbf{x}_{N+1} \in B_\epsilon(\mathbf{x}_N)$, o que contradiz a definição de $\mathbf{x}_{N+1}$. Isto conclui a demonstração deste caso particular.

Mostramos agora que dada uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de K, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo o $\mathbf{x} \in K$, existe α tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset U_\alpha$.

Suponhamos por absurdo que tal não era o caso. Então para cada n, existe $\mathbf{x}_n \in K$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x}_n)$ não está contida em nenhum U_α. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass a sucessão $\mathbf{x}_n$ tem uma subsucessão convergente em D. Sem perda de generalidade, podemos assumir que a sucessão $\mathbf{x}_n$ converge para $\mathbf{z} \in D$. Seja α tal que $\mathbf{z} \in U_\alpha$. Então, para n suficientemente grande, $B_{\frac{1}{n}}(\mathbf{x}_n) \subset U_\alpha$ o que contradiz a definição de $\mathbf{x}_n$. Conclui-se que existe ϵ com a propriedade desejada.

Para concluir a demonstração, dada uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de K escolha-se ϵ como no parágrafo anterior. Então existem pontos $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_\epsilon(\mathbf{x}_k).$$

Escolha-se α_k tal que $B_\epsilon(\mathbf{x}_k) \subset U_{\alpha_k}$. Então

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{\alpha_k}$$

o que conclui a demonstração.

2.2 Suponha que $n < m$. Seja $D \subset E^n$ um aberto e $\mathbf{g} : D \to E^m$ uma transformação de classe C^1. Mostre que se $D\mathbf{g}(\mathbf{t}_0)$ é injectiva, então existe um aberto Δ contendo $\mathbf{t}_0$ tal que $\mathbf{g}$ é injectiva em Δ.

Solução: $D\mathbf{g}(\mathbf{t}_0)$ ser injectiva significa que n das linhas da matriz que representa $D\mathbf{g}(\mathbf{t}_0)$ são linearmente independentes. Sem perda de generalidade assumamos que as primeiras n linhas são linearmente independentes. A função $h : D \to E^n$ definida por $\mathbf{h}(\mathbf{t}) = (g^1(\mathbf{t}), \ldots, g^n(\mathbf{t}))$ é uma função de classe C^1 em D e por hipótese $\det D\mathbf{h}(\mathbf{t}_0) \neq 0$. O teorema da função inversa garante a existência de um aberto $\Delta \subset E^n$ contendo $\mathbf{t}_0$ tal que $\mathbf{h}$ é injectiva em Δ. Para $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \Delta$, tem-se

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \mathbf{g}(\mathbf{s}) \implies \mathbf{h}(\mathbf{t}) = \mathbf{h}(\mathbf{s}) \implies \mathbf{s} = \mathbf{t}$$

logo $\mathbf{g}$ é injectiva em Δ.

3.2

(a) Mostre que o intervalo $M = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \subset E^2$ não é uma variedade de dimensão 1 em E^2.

(b) Dê um exemplo de uma variedade M de dimensão 1 em E^2 para a qual não existe nenhuma função $\phi : E^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $M = \{\mathbf{x} \in E^2 : \phi(x) = 0\}$.

Solução:

(a) Se M fosse uma variedade de dimensão 1, existiria um aberto U contendo $(0, 0)$, uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}$ e uma função $f : V \to \mathbb{R}$ tal que $U \cap M = \{(x, f(x)) : x \in V\}$ ou $U \cap M = \{(f(y), y) : y \in V\}$. Tal não acontece porque as funções coordenadas x e y nunca assumem valores negativos em M.

Outra solução (do Ricardo Joel): Suponhamos que M era uma variedade de dimensão 1. Então existiria uma bola $B_\epsilon((0, 0))$ e uma função $\phi : B_\epsilon((0, 0)) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $M \cap B_\epsilon((0, 0)) = \phi^{-1}(0)$ e $\nabla\phi(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo o $\mathbf{x} \in M$. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_\epsilon((0, 0)) \setminus M$ e seja $\gamma : [0, 1] \to B_\epsilon((0, 0)) \setminus M$ uma função contínua com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Então $\phi \circ \gamma$ é uma função contínua em $[0, 1]$ que nunca se anula e portanto tem sempre o mesmo sinal. Sem perda de generalidade podemos assumir que o sinal é $+$ e concluimos que $\phi(\mathbf{x}) > 0$ para todo o $\mathbf{x} \in B_\epsilon((0, 0)) \setminus M$. Mas então os pontos de $M \cap B_\epsilon((0, 0)$ são pontos de mínimo de ϕ e portanto $\nabla\phi(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x} \in M$ contráriamente ao que assumimos sobre ϕ. Conclui-se que M não é uma variedade de dimensão 1.

(b) $M = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}$ é uma variedade de dimensão 1, já que é o gráfico da função constante 0 sobre o aberto $]0, 1[$ de $\mathbb{R}$. Não pode existir uma função contínua $\phi : E^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\phi^{-1}(0) = M$ porque $\phi^{-1}(0)$ é necessáriamente um conjunto fechado e M não é um subconjunto fechado de E^2.

3.4 e 4.1 O espaço vectorial das matrizes 3×3 de entradas reais $M_3(\mathbb{R})$ pode ser identificado com E^9 de forma natural. Considere o subconjunto de E^9

$$M = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t A = I\}$$

formado pelas matrizes 3×3 ortogonais. Mostre que M é uma variedade compacta de classe C^∞. Mostre que $T_I M = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t + A = 0\}$.
Solução: Seja $W \subset M_3(\mathbb{R})$ o subespaço vectorial das matrizes simétricas de $M_3(\mathbb{R})$. Defina-se $F : M_3(\mathbb{R}) \to W$ por

$$F(A) = A^t A - I.$$

W identifica-se com E^6 tomando por exemplo as 6 entradas de uma matriz $A \in W$ que não estão abaixo da diagonal. Mediante estas identificações, F é uma função de classe C^∞ já que as suas componentes são funções polinomiais. Uma vez que

$$M = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : F(A) = 0\}$$

para ver que M é uma variedade de dimensão 3 de classe C^∞, é suficiente ver que a derivada de F, $DF(A) : M_3(\mathbb{R}) \to W$ é sobrejectiva para todo o $A \in M$.

Como

$$F(A+H) - F(A) = A^t H + H^t A + H^t H = A^t H + H^t A + o(|H|)$$

a derivada de F é dada pela fórmula $DF(A)(H) = A^t H + H^t A$. Se S é uma matriz simétrica qualquer então para qualquer $A \in M$ tem-se

$$DF(A)(AS) = A^t AS + S^t A^t A = S + S^t = 2S,$$

logo $DF(A)$ é sobrejectiva e portanto M é uma variedade de dimensão 3 e de classe C^∞ em E^9.

Para calcular o espaço tangente a M em I, seja $\phi :]-\delta, \delta[\to M$ uma função de classe C^1 tal que $\phi(0) = I$. Então

$$\frac{d}{ds}\left(\phi(s)^t \phi(s)\right) = \phi'(s)^t \phi(s) + \phi(s)^t \phi'(s) = 0$$

Definindo $H = \phi'(0)$ e avaliando a expressão anterior em $s = 0$ conclui-se que $H + H^t = 0$, e portanto $T_I(M) \subset \{H \in M_3(\mathbb{R}) : H + H^t = 0\}$. Uma vez que $T_I(M)$ e $\{H \in M_3(\mathbb{R}) : H + H^t = 0\}$ têm ambos dimensão 3, conclui-se que $T_I(M) = \{H \in M_3(\mathbb{R}) : H + H^t = 0\}$.

4.2 b) Seja M uma variedade compacta de dimensão $n-1$ em E^n. Mostre que existe um intervalo $J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ de E^n com $a_i < b_i$, contendo M e cujas faces são tangentes a M.
Solução: Sejam $a_i = \min\{x^i : \mathbf{x} \in M\}$ e $b_i = \max\{x^i : \mathbf{x} \in M\}$, que estão bem definidos pelo Teorema de Weierstrass uma vez que M é um conjunto compacto e as funções coordenadas $x^i : E^n \to \mathbb{R}$ são contínuas.

Por definição dos a_i's e b_i's, temos $M \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Seja $\mathbf{x} \in M$ um ponto qualquer com $x^i = a_i$. Uma vez que x^i é uma função diferenciável, pelo método dos multiplicadores de Lagrange, $\nabla x^i(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i \in (T_{\mathbf{x}} M)^\perp$. Como M tem dimensão $n-1$, $\mathbf{e}_i$ gera $(T_{\mathbf{x}} M)^\perp$, portanto o hiperplano tangente a M em $\mathbf{x}$ é o plano $\{\mathbf{x} \in E^n : x^i = a_i\}$. De forma análoga se vê que o hiperplano tangente aos pontos $\mathbf{x} \in M$ onde $x^i = b_i$ é o hiperplano $\{\mathbf{x} \in E^n : x^i = b_i\}$. Portanto as faces do intervalo $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ são tangentes a M.

Suponhamos que $a_i = b_i$ para algum i. Então $x^i = a_i$ para todo o $\mathbf{x} \in M$ e portanto $\mathbf{e}_i \in (T_\mathbf{x}M)^\perp$ para todo o $\mathbf{x} \in M$. Isso é impossível porque já vimos que existem pontos $\mathbf{x} \in M$ onde $\mathbf{e}_j \in (T_\mathbf{x}M)^\perp, j \neq i$ e sendo M uma variedade de dimensão $n-1$, $(T_\mathbf{x}M)^\perp$ tem dimensão 1 para todo o $\mathbf{x} \in M$. Conclui-se que $a_i < b_i$ para todo o i.

4.4 Seja $M = \{\mathbf{x} \in E^n : \Phi(\mathbf{x}) = 0\}$ uma variedade, com Φ de classe C^2 tal que $D\Phi(\mathbf{x})$ tem característica máxima para todo o $\mathbf{x} \in M$. Sejam $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida num aberto contendo M, F como na regra dos multiplicadores de Lagrange e $Q(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^n F_{ij}(\mathbf{x}) h^i h^j$. Mostre que

(a) Se $f|_M$ tem um mínimo relativo em $\mathbf{x}_0$ então $Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) \geq 0$ para todo o $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}_0}M$.

(b) Se $\mathbf{x}_0$ é um ponto de estacionariedade de F e $Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) > 0$ para todo o $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}_0}M$, $\mathbf{h} \neq 0$, então $f|_M$ tem um mínimo relativo estrito em $\mathbf{x}_0$.

Solução: Primeiro note-se que $F|M = f|M$ logo $f|M$ tem um extremo relativo em $\mathbf{x}_0$ sse o mesmo sucede com $F|M$.

(a) Dado $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}_0}M$, seja $\phi :]-\delta, \delta[\to M$ uma função de classe C^2 tal que $\phi(0) = \mathbf{x}_0$ e[1] $\phi'(0) = \mathbf{h}$. Uma vez que $F|M$ tem um mínimo relativo em $\mathbf{x}_0$ e ϕ é contínua, $F(\phi(t))$ tem um mínimo relativo em $t = 0$. Uma vez que $F \circ \phi$ é de classe C^2 conclui-se que $(F \circ \phi)''(0) \geq 0$. Pela regra da cadeia tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(F \circ \phi(t)) &= \nabla F(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\
&= \sum_{i=1}^n F_i(\phi(t)) \phi^{i\prime}(t), \\
\frac{d^2}{dt^2}(F \circ \phi(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^n F_i(\phi(t)) \phi^{i\prime}(t)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n F_{ij}(\phi(t)) \phi^{i\prime}(t) \phi^{j\prime}(t) + \sum_{i=1}^n F_i(\phi(t)) \phi^{i\prime\prime}(t).
\end{aligned}$$

O método dos multiplicadores de Lagrange garante que $\nabla F(\phi(0)) = \nabla F(\mathbf{x}_0) = 0$, pelo que

$$(F \circ \phi)''(0) = \sum_{i,j=1}^n F_{ij}(\mathbf{x}_0) h^i h^j = Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) \geq 0$$

como se queria demonstrar.

[1] É fácil verificar que se M é uma variedade de classe C^2 então qualquer vector tangente a M é tangente a uma curva de classe C^2 em M.

(b) Suponhamos por absurdo que $\mathbf{x}_0$ não é um ponto de mínimo relativo estrito. Então existe uma sucessão de pontos $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_n \in M$ com $\mathbf{h}_n \neq 0$, $\mathbf{h}_n \to 0$ e $F(\mathbf{y}_n) \leq F(\mathbf{x}_0)$. Uma vez que F é de classe C^2, F tem um desenvolvimento de Taylor de segunda ordem no ponto $\mathbf{x}_0$

$$F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_n) = F(\mathbf{x}_0) + \nabla F(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}_n + \frac{1}{2} Q(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n) \tag{1}$$

com $s \in]0,1[$. Uma vez que $\mathbf{x}_0$ é um ponto de estacionariedade de F, o termo de primeira ordem anula-se. Vamos agora utilizar a hipótese sobre a forma quadrática Q e o facto de a direção de $\mathbf{h}_n$ tender para a direcção de um vector tangente (num sentido que vamos tornar preciso).

Considere-se a sucessão $\frac{\mathbf{h}_n}{|\mathbf{h}_n|} \in S^{n-1}$. Uma vez que S^{n-1} é um conjunto compacto, esta sucessão tem uma subsucessão convergente em S^{n-1}. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\frac{\mathbf{h}_n}{|\mathbf{h}_n|} \to \mathbf{h} \in S^{n-1}$. Vamos ver que $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{x_0}}M$. Por definição de derivada, e porque $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ para todos os pontos $\mathbf{x} \in M$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \frac{|\Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_n) - \Phi(\mathbf{x}_0)|}{|\mathbf{h}_n|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|D\Phi(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_n|}{|\mathbf{h}_n|} \\ &= \lim_{n\to\infty} |D\Phi(\mathbf{x}_0)\frac{\mathbf{h}_n}{|\mathbf{h}_n|}| \\ &= |D\Phi(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}|. \end{aligned}$$

Isto é, $\mathbf{h}$ pertence ao núcleo de $D\Phi(\mathbf{x}_0)$ e portanto $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}_0}M$.

Utilizando a homogeneidade de Q, a fórmula (1) implica que

$$F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_n) - F(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}|\mathbf{h}_n|^2 Q(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}_n, \frac{\mathbf{h}_n}{|\mathbf{h}_n}|)$$

Uma vez que F é de classe C^2, Q é uma função contínua de ambas as variáveis, donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_n) - F(\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{h}_n|^2} = \frac{1}{2} Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}).$$

Mas isto é impossível porque, por hipótese sobre $\mathbf{h}_n$, o termo esquerdo tem de ser menor ou igual do que 0 enquanto que por hipótese sobre Q o termo direito é estritamente maior que 0.

Conclui-se que F tem um mínimo relativo estrito em $\mathbf{x}_0$.

Notas:

(i) Embora o argumento usado na alínea a) permita concluir que F tem um mínimo relativo estrito ao longo de cada curva em M, isso *não é suficiente* para garantir imediatamente que F tem um mínimo relativo estrito em M. Por exemplo, a função $g : E^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} (y-2x^2)^2 & \text{se } y > 2x^2 \\ 0 & \text{se } x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ (y-x^2)^2 & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

tem um mínimo relativo estrito ao longo de cada recta que passa na origem mas não tem um mínimo relativo estrito na origem. De facto, se uma função g é de classe C^2 e a matriz Hessiana é definida positiva, isto não pode acontecer porque se $\lambda > 0$ for o menor dos valores próprios da matriz Hessiana de g no ponto de estacionariedade, $g(\mathbf{x}) \geq (\lambda - \epsilon)|\mathbf{x}|^2$ para qualquer $\epsilon > 0$ nalguma vizinhança do ponto (pela fórmula de Taylor). Poderia utilizar-se este facto conhecido para funções definidas em abertos de E^m para demonstrar o resultado equivalente para variedades, mas para tal seria necessário considerar uma *parametrização* (falaremos disto mais tarde) de uma vizinhança do ponto $\mathbf{x}_0$ em M e não apenas de curvas em M que passem pelo ponto $\mathbf{x}_0$.

(ii) A ideia básica deste resultado é a seguinte: a fórmula de Taylor (1) e a condição sobre Q garantem que a função F tem um mínimo relativo estrito quando F é restrita ao plano tangente $\mathbf{x}_0 + T_{\mathbf{x}_0}M$. O plano tangente é uma aproximação de M a menos de um erro de ordem > 1 (para tornar isto preciso utiliza-se a fórmula de Taylor de uma parametrização de M em torno de $\mathbf{x}_0$). Isto é, dado $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u} \in M$, existe $\mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}_0}M$ tal que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} + o(|\mathbf{u}|)$$

Uma vez que o termo de primeira ordem em (1) se anula em $\mathbf{x}_0$, conclui-se que $F(\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) + o(|\mathbf{h}|^2)$, ou seja, as restrições de F a M e ao plano tangente coincidem até à segunda ordem numa vizinhança de $\mathbf{x}_0$. A hipótese sobre a forma quadrática é que o termo de segunda ordem tenha um mínimo relativo estrito, e é suficiente para garantir que as restrições de F tanto a M como ao espaço tangente tem um mínimo relativo estrito.

Note-se que *não* basta que a matriz Hessiana de f em $\mathbf{x}_0$ seja definida positiva para que $f|M$ tenha um mínimo quando restrita a M. Como $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ não se anula em $\mathbf{x}_0$, apenas podemos garantir que as restrições de f ao plano tangente e a M diferem num termo de ordem superior a 1 em torno de $\mathbf{x}_0$. Portanto a condição na Hessiana, que implica que f tenha um mínimo quando restrita ao espaço tangente, não implica o mesmo para a restrição de f a M.

5.1 Seja $\mathcal{E}$ a álgebra dos subconjuntos elementares de E^n e $V_n : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ a função aditiva definida na aula. Mostre a partir da definição de medida exterior que $\overline{V}_n(E) \geq V_n(E)$.

Solução: Começamos por observar que a medida exterior pode ser definida com recurso apenas a intervalos abertos. De facto, defina-se

$$\tilde{V}_n(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} V_n(I_k) : I_k \text{ intervalos abertos, } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}.$$

Então claramente, $\overline{V}_n(A) \leq \tilde{V}_n(A)$. Por outro lado, dado um intervalo $I_k \subset E^n$ limitado, existe um intervalo aberto $I'_k \supset I_k$ tal que $V_n(I'_k) < V_n(I_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$ e dado um intervalo $I_k \subset E^n$ ilimitado mas com $V_n(I_k) = 0$, existe uma família numerável $\{I'_{k,l} : l = 1, \ldots \infty\}$ de intervalos abertos tais que $I_k \subset \cup_{l=1}^{\infty} I'_{k,l}$ e $\sum_{l=1}^{\infty} V_n(I'_{k,l}) < \frac{\epsilon}{2^k}$. Daqui se conclui que dado um conjunto A e uma família de intervalos I_k tais que $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} V_n(I_k) < \infty$, existe uma família numerável de intervalos abertos J_m tal que $\cup_{k=1}^{\infty} I_k \subset \cup_{m=1}^{\infty} J_m$ e $\sum_{m=1}^{\infty} V_n(J_m) \leq \sum_{k=1}^{\infty} V_n(I_k) + \epsilon$. Isto mostra que $\overline{V}_n(A) \geq \tilde{V}_n(A)$ e portanto a medida exterior de Lebesgue pode ser definida com recurso apenas a intervalos abertos.

Suponhamos agora que E é um conjunto elementar compacto e seja $\{I_k\}$ uma família de intervalos abertos de E^n tais que $E \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. Então, pelo teorema de Heine-Borel, existe N tal que $E \subset \cup_{k=1}^{N} I_k$. Uma vez que $\cup_{k=1}^{N} I_k \in \mathcal{E}$ e V_n é uma função aditiva em $\mathcal{E}$, tem-se

$$V_n(E) \leq V_n(\cup_{k=1}^{N} I_k) \leq \sum_{k=1}^{N} V_n(I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} V_n(I_k)$$

e portanto $V_n(E) \leq \overline{V}_n(E)$.

Dado um conjunto elementar E arbitrário, existe uma sucessão de conjuntos elementares compactos E_j tais que $E_j \subset E$ e $V_n(E_j) \to V_n(E)$. Uma vez que $\overline{V}_n(E) \geq \overline{V}_n(E_j) \geq V_n(E_j)$ conclui-se que $\overline{V}_n(E) \geq V_n(E)$ o que conclui a demonstração.

5.4 a) O conjunto de Cantor C é a intersecção dos seguintes conjuntos:

$$F_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \bigcup [\tfrac{2}{3}, 1]$$
$$F_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \bigcup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \bigcup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \bigcup [\tfrac{8}{9}, 1]$$
$$\cdots$$

Isto é, F_{n+1} obtém-se de F_n retirando o terço do meio de cada um dos intervalos que forma F_n. Mostre que C é não numerável.

Solução: A expansão de um número $x \in [0, 1]$ em base 3 é, por definição, uma expressão da forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \qquad a_k \in \{0, 1, 2\}.$$

Os números que têm uma expansão finita $x = \sum_{k=1}^{N} a_k 3^{-k}$ são precisamente os múltiplos de $\frac{1}{3^N}$ que estão entre 0 e 1 (pelo algoritmo de divisão por 3). Como

$\frac{1}{3^N} \to 0$ quando $n \to \infty$, todos os números entre $[0,1]$ têm uma expansão em base 3. Uma vez que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^N} \tag{2}$$

tem-se

$$0 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k 3^k \leq \frac{1}{3^N}$$

logo os primeiros N dígitos $a_1, \ldots, a_N$ determinam que x se encontra no intervalo $[\frac{l}{3^N}, \frac{l+1}{3^N}]$ onde $l = a_1 3^{N-1} + \ldots + a_N$. A expressão (2) implica também que a expansão é única a menos do seguinte conjunto (numerável) de excepções:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k 3^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k 3^{-k}$$

sse $a_N = 1$ ou 2, $a_k = a'_k$ para $k < N$, $a'_N = a_N - 1$ e $a'_k = 2$ para todo o $k > N$. Se convencionarmos nunca terminar uma expansão finita em 1 e nunca terminar uma expansão em 1(2), obtemos uma representação única de qualquer $x \in [0,1]$ em base 3 e não é difícil provar por indução que, utilizando esta representação,

$$F_n = \{x \in [0,1] : x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \text{ com } a_1, \ldots, a_n \in \{0,2\}\}.$$

Conclui-se que os elementos de $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ são precisamente aqueles que têm todos os dígitos iguais a 0 ou 2.

Como os elementos de C estão em correspondência bijectiva com as funções de $\mathbb{N}$ em $\{0,2\}$, C é um conjunto não numerável.

5.5 Considere a seguinte relação de equivalência em $\mathbb{R}$: $x \sim y$ sse $x - y \in \mathbb{Q}$. Seja $E \subset [0,1]$ um conjunto formado escolhendo um representante de cada classe de equivalência no intervalo $[0,1]$. A existência de E é assegurada por um axioma da teoria dos conjuntos chamado o axioma da escolha.

(a) Seja $\{q_n\}$ uma enumeração dos racionais do intervalo $[-1,1]$. Mostre que

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} q_n + E \subset [-1,2].$$

(b) Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a família de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$. Mostre que não existe nenhuma função σ-aditiva $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ tal que $\phi([0,1]) = 1$ e $\phi(x + A) = \phi(A)$.

(c) Mostre que $E \notin \mathcal{M}$ (isto é, E não é mensurável).

Solução:

(a) Uma vez que $E \subset [0,1]$ e $q_n \in [-1,1]$, tem-se $q_n + E \subset [-1,2]$ para todo o n e portanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} q_n + E \subset [-1,2]$.

Seja $y \in [0,1]$ e $x \in E$ o representante em E da classe de equivalência de y. Então $q := y - x \in \mathbb{Q}$. Como $x, y \in [0,1]$ conclui-se que $q \in [-1,1]$ donde $y \in q + E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} q_n + E$.

(b) Suponhamos que existe uma função ϕ como no enunciado. Então $\phi(\{x\}) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. De facto, como ϕ é invariante por translacções $\phi(\{\frac{1}{n}\}) = \phi(\{x\})$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Pela σ-aditividade de ϕ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi(\{x\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(\{\frac{1}{n}\}) = \phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\}) \leq \phi([0,1]) = 1,$$

logo $\phi(\{x\}) = 0$. Segue-se da aditividade e invariância por translacções de ϕ que $\phi([-1,2]) = \phi([-1,0[\bigcup[0,1]\bigcup]1,2]) = 3$. Novamente por aditividade de ϕ, tem-se

$$1 = \phi([0,1]) \leq \phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} q_n + E) \leq \phi([-1,2]) = 3. \tag{3}$$

Dados $q_n + x \in q_n + E$ e $q_m + y \in q_m + E$ tais que $q_n + x = q_m + y$ tem-se $x - y \in \mathbb{Q}$, ou seja $x \sim y$. Como E contem apenas um representante de cada classe de equivalência isto implica $x = y$ e $q_n = q_m$. Assim os conjuntos $q_n + E$ são disjuntos dois a dois e (por σ-aditividade e invariância por translacções) a equação (3) fica

$$1 = \phi([0,1]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(E) \leq \phi([-1,2]) = 3. \tag{4}$$

o que é impossível. Logo não pode existir uma função ϕ com as propriedades desejadas.

(c) Se E fosse mensurável, o mesmo se passaria com cada uma das suas translacções e portanto com $\bigcup_{n=1}^{\infty} q_n + E$. As desigualdades (4) com ϕ substituído por V_1 teriam de se verificar o que é impossível.