Resumos de AMIII
Turma especial 2001

10 de Janeiro de 2002

I. Variedades em $\mathbb{R}^n$

1. Revisões de Cálculo Diferencial

1. *Notação:* E^n designa $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a base canónica e $x^1, \dots, x^n$ as funções coordenadas.
2. Se $U \subset E^n$ é aberto, $\mathbf{f} : U \to E^m$ uma função (portanto $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^m)), \mathbf{x}_0 \in U$ e $\mathbf{v} \in E^n$ então a *derivada direccional* de $\mathbf{f}$ segundo $\mathbf{v}$ no ponto $\mathbf{x}_0$ é
$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})|_{t=0}.$$
3. A i-ésima *derivada parcial* de $\mathbf{f}$ é
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^i} \equiv \mathbf{f}_i \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^i} \\ \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_i^1 \\ \dots \\ f_i^n \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} D_{\mathbf{e}_i}\mathbf{f}.$$
4. $\mathbf{f}$ diz-se *diferenciável* em $\mathbf{x}_0$ se existe uma transformação linear $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : E^n \to E^m$ (representada por uma matriz $m \times n$) tal que
$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$
5. Se $\mathbf{f}$ é diferenciável então $\mathbf{f}$ é contínua.
6. Se $\mathbf{f}$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$ então
$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}.$$
Em particular, $D\mathbf{f}$ é representada na base canónica pela *matriz Jacobiana*
$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 & \dots & f_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^m & \dots & f_n^m \end{bmatrix}.$$

7. $\mathbf{f}$ diz-se de classe C^1 se as derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ são funções contínuas.
8. $\mathbf{f}$ $C^1 \Rightarrow \mathbf{f}$ diferenciável.
9. Se $\mathbf{f} : U \subset E^n \to V \subset E^m$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0 \in U$, e $\mathbf{g} : V \subset E^m \to E^p$ é diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, então $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : U \subset E^n \to E^p$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$ e

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Em coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ em E^n e $(y^1, \ldots, y^m)$ em E^m, tem-se

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g^i}{\partial y^k} \frac{\partial f^k}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} g^i_k f^k_i \text{(regra da cadeia)}$$

10. Derivadas parciais de ordem superior:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = f_{ji}.$$

f diz-se de classe C^2 se todas as derivadas parciais de segunda ordem são funções contínuas.

11. *Lema de Schwarz:* f $C^2 \Rightarrow f_{ij} = f_{ji}$.

2. Função Inversa e Função Implícita

1. O *jacobiano* da função diferenciável $\mathbf{f} : E^n \to E^n$ é a função

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

2. *Teorema da Função Inversa:* Seja $\mathbf{f} : U \subset E^n \to E^n$ uma função de classe C^k com $1 \leq k \leq \infty$ e $\mathbf{x}_0 \in U$ tal que $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Então existe um aberto $V \ni \mathbf{x}_0$ tal que
   (i) $\mathbf{f}|V$ é injectiva.
   (ii) $\mathbf{f}(V)$ é aberto.
   (iii) A função inversa $\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{f}(V) \to V$ é de classe C^k.
   (iv) $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in V$.
3. Uma função $\mathbf{f} : U \subset E^n \to E^k$ é contínua sse para todo o aberto $W \subset E^k$, $\mathbf{f}^{-1}(W) = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in W\}$ é um aberto relativo em U.
4. $\mathbf{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ verifica as condições do teorema da função inversa em todos os pontos do seu domínio mas não é invertível.
5. *Teorema da Função Implícita:* Seja $\mathbf{F} : E^{n+m} \to E^m$ uma função de classe C^k e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in E^{n+m}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ e $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança $U \times V \ni (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ e uma função de classe C^k $\mathbf{f} : U \subset E^n \to V \subset E^m$ tais que

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V : \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

6. Nas condições do Teorema da Função Implícita, as derivadas parciais de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{x}_0$ podem ser calculadas aplicando a regra da cadeia à equação $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$.

3. Variedades Diferenciáveis

1. Um conjunto $M \subset E^n$ é uma *variedade diferenciável de dimensão* $m \in \{0, \ldots, n\}$ (e classe C^q, $q \geq 1$) se para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ e uma função de classe C^q $\mathbf{F} : U \to E^{n-m}$ tais que
   i. $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$;
   ii. A característica de $D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = n - m$ (i.e., é máxima) para todo o $\mathbf{x} \in U$.
2. Uma variedade de dimensão 0 é simplesmente um conjunto do pontos isolados; uma variedade de dimensão n é simplesmente um conjunto aberto.
3. $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão m (e classe C^q) *sse* para qualquer ponto $\mathbf{x}_0 \in M$ existe uma vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ e uma função C^q $\mathbf{f} : E^m \to E^{m-n}$ tais que
$$M \cap U = \mathrm{Graf}(\mathbf{f}) \cap U.$$
4. Um vector $\mathbf{v} \in E^n$ é um *vector tangente* à variedade M no ponto $\mathbf{x}_0$ se existe uma função $\mathbf{g} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0$ e $\frac{d\mathbf{g}}{dt}(0) = \mathbf{v}$.
5. O conjunto $T_{\mathbf{x}_0}M$ de todos os vectores tangentes à variedade M em $\mathbf{x}_0$ é um espaço vectorial de dimensão m, dito o *espaço tangente* a M no ponto $\mathbf{x}_0$. O seu complemento ortogonal $T^{\perp}_{\mathbf{x}_0}M$ é um espaço vectorial de dimensão $n - m$, dito o *espaço normal* a M no ponto $\mathbf{x}_0$.
6. Se $M = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ numa vizinhança $U \ni \mathbf{x}_0$ tendo $D\mathbf{F}(\mathbf{x})$ característica máxima, então
$$T_{\mathbf{x}_0}M = \text{Núcleo de } D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$$
$$T^{\perp}_{\mathbf{x}_0}M = \mathrm{span}\{\nabla F^1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla F^m(\mathbf{x}_0)\}.$$
7. *Teorema dos Extremos Condicionados:* Sejam $f : E^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $M \subset E^n$ uma variedade m-dimensional. Se a restrição de f a M tem um extremo local em $\mathbf{x}_0 \in M$ então $\nabla f(\mathbf{x}_0) \in T^{\perp}_{\mathbf{x}_0}M$.
8. *Regra dos Multiplicadores de Lagrange:* Nas condições do teorema anterior, existem constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ (os *multiplicadores de Lagrange*) tais que
$$\nabla(f + \lambda_1 F^1 + \ldots + \lambda_{n-m} F^{n-m})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

II. Integração em $\mathbb{R}^n$

1. Medida de Lebesgue

1. Um *intervalo* $I \subset E^n$ é um conjunto da forma $I = J_1 \times \ldots \times J_n$, onde cada J_k é um intervalo de extremos $a_k, b_k \in [-\infty, +\infty]$. Define-se a *medida* (n-dimensional) de um intervalo através de
$$V_n(I) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$
com a convenção $0 \cdot \infty = 0$.
2. Um *conjunto elementar* $E \subset E^n$ é uma união finita de intervalos,
$$E = \bigcup_{k=1}^{N} I_k.$$

Define-se a *medida* (n-dimensional) de um conjunto elementar através de

$$V_n(E) = \sum_{k=1}^{N} V_n(I_k) \in [0, +\infty].$$

onde I_k é uma decomposição de E em intervalos disjuntos.

3. Dado um subconjunto qualquer $A \subset E^n$, define-se a sua *medida exterior* (n-dimensional) como sendo

$$\overline{V}_n(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(I_k) : I_k \text{ intervalo limitado } , A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k \right\} \in [0, +\infty]$$

4. Se $\overline{V}_n(A) = 0$ diz-se que A tem *medida nula*.
5. Propriedades da medida exterior:
   i. $\overline{V}_n(\varnothing) = 0$;
   ii. $A \subset B \Rightarrow \overline{V}_n(A) \leq \overline{V}(B)$;
   iii. E elementar limitado $\Rightarrow \overline{V}_n(E) = V_n(E)$;
   iv. $\overline{V}_n(\mathbf{a} + A) = \overline{V}_n(A)\ \forall \mathbf{a} \in E^n$;
   v. $A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \Rightarrow \overline{V}_n(A) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{V}_n(A_k)$.
6. Uma família $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de E^n diz-se uma *cobertura* de $A \subset E^n$ se

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

   A cobertura diz-se *aberta* se todos os U_i são abertos. Uma *subcobertura* é uma subfamília $\{U_i\}_{i \in J}$ $(J \subset I)$ que é ainda uma cobertura de A.
7. *Teorema de Heine-Borel:* $K \subset E^n$ é *compacto* (i.e., limitado e fechado) *sse* toda a cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.
8. A *diferença simétrica* entre dois conjuntos A e b é

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

9. Um conjunto $A \subset E^n$ diz-se *mensurável* se

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{J_k \text{intervalos}} : \overline{V}_n(A \Delta \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k) < \varepsilon.$$

   Se A é mensurável, define-se a sua *medida de Lebesgue* (n-dimensional) por $V_n(A) = \overline{V}_n(A) \leq +\infty$.
10. Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de E^n diz-se uma *álgebra de conjuntos* se
   i. $\varnothing \in \mathcal{A}$;
   ii. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \equiv E^n \setminus A \in \mathcal{A}$;
   iii. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in A$.

Uma álgebra $\mathcal{A}$ diz-se uma *σ-álgebra* se

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

11. Seja $\mathcal{M}$ a família dos subconjuntos mensuráveis de E^n. Então:
    i. $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra;
    ii. $V_n : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ é *σ-aditiva*, i.e., se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ são disjuntos 2 a 2 então

$$V_n(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} V_n(A_k).$$

12. Qualquer conjunto de medida nula é mensurável. Qualquer conjunto aberto/fechado é mensurável.
13. Para $A \in \mathcal{M}$, uma função $f : A \to \mathbb{R}$ diz-se *mensurável* se $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$ para qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$. O conjunto das funções mensuráveis em A designa-se por $\mathcal{M}(A)$.
14. Qualquer função contínua é mensurável.
15. Se $f : E^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, define-se

$$f^+(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}, \quad f^-(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -f(\mathbf{x}) & \text{se} \quad f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

(note-se que $f^+, f^- \geq 0, f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$).

16. i. f mensurável $\Rightarrow f^+, f^-$ mensuráveis.
    ii. f, g mensuráveis $\Rightarrow f \pm g, fg$ mensuráveis.
    iii. $f_1, f_2, \ldots$ mensuráveis e $f(\mathbf{x}) = \lim_{k \to +\infty} f_k(\mathbf{x})$ existe $\Rightarrow f$ mensurável.
    iv. Se $F : E^2 \to \mathbb{R}$ é contínua e f, g são mensuráveis, então $F(f, g)$ é mensurável.
    v. $\mathcal{M}$ é um espaço vectorial.
17. Se $A \subset E^n$, a *função característica* de A é a função $\chi_A : E^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \mathbf{x} \in A \\ 0 & \text{se} \quad \mathbf{x} \notin A \end{cases}.$$

18. A função $s : E^n \to \mathbb{R}$ diz-se *simples* se existem conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_n \subset E^n$ e números reais $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i}.$$

s é mensurável *sse* $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{M}$.

19. Se $f : E^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, existe uma sucessão $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de funções simples tais que

$$\lim_{k \to +\infty} s_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \ \forall_{\mathbf{x} \in E^n}.$$

Além disso:
    i. Se f é mensurável, as funções s_k podem ser escolhidas mensuráveis;
    ii. Se $f \geq 0$, podemos escolher $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ monótona crescente:

$$0 \leq s_1(\mathbf{x}) \leq s_2(\mathbf{x}) \leq \ldots, \ \forall_{\mathbf{x} \in E^n}.$$

2. Integral de Lebesgue

1. Se $s : E^n \to [0, +\infty[$ é simples e mensurável,

$$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i} \qquad c_i \in \mathbb{R}^+, A_i \in \mathcal{M},$$

define-se o seu *integral* como sendo

$$\int_{E^n} s dV_n = \sum_{i=1}^{N} c_i V(A_i)$$

(pode ser $+\infty$).

2. Se $f : E^n \to [0, +\infty[$ é mensurável, define-se

$$\int_{E^n} f dV_n = \sup\{\int_{E^n} s dV_n : 0 \leq s \leq f \text{ é simples e mensurável } \}$$

(pode ser $+\infty$). Se

$$\int_{E^n} f dV_n < +\infty$$

a função f diz-se *integrável*.

3. Uma função mensurável $f : E^n \to \mathbb{R}$ diz-se *integrável* se f^+, f^- o são. Nesse caso, define-se

$$\int_{E^n} f dV_n = \int_{E^n} f^+ dV_n - \int_{E^n} f^- dV_n.$$

4. Se $A \in \mathcal{M}$, f diz-se *integrável em* A se $f\chi_A$ é integrável, caso em que se define

$$\int_A f dV_n = \int_{E^n} f \chi_A dV_n.$$

O conjunto das funções integráveis em A designa-se por $\mathcal{L}(A)$.

5. Seja $A \in \mathcal{M}$. Então
   i. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é mensurável e limitada e $V_n(A) < +\infty$ então $f \in \mathcal{L}(A)$;
   ii. Se $f, g \in \mathcal{L}(A)$ e $f \leq g$ então

   $$\int_A f dV_n \leq \int_A g dV_n.$$

   iii. Se $V_n(A) = 0$ então $\int_A f dV_n = 0$.
   iv. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{L}(A)$ então $af + bg \in \mathcal{L}(A)$ e

   $$\int_A (af + bg) dV_n = a \int_A f dV_n + b \int_A g dV_n.$$

   v. $f \in \mathcal{L}(A)$ *sse* $|f| \in \mathcal{L}(A)$, e

   $$\left| \int_A f dV_n \right| \leq \int_A |f| dV_n.$$

6. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável então $f \in \mathcal{L}([a, b])$ e

$$\int_{[a,b]} f dV_1 = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Teorema de Fubini e Aplicações

1. Se $P(\mathbf{x})$ é uma proposição que depende de $\mathbf{x} \in A \subset E^n$, dizemos que $P(\mathbf{x})$ é *verdadeira quase em toda a parte em* A (q.t.p. em A) se

$$V_n\left(\{\mathbf{x} \in A : P(\mathbf{x}) \text{ é falsa }\}\right) = 0.$$

2. *Teorema de Fubini:* Se $A \subset E^n$ e $B \subset E^n$ são intervalos quaisquer e $f \in L^1(A \times B)$ então:
   i. A função $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^1(A)$ para quase todo o $\mathbf{y} \in B$;
   ii. A função $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^1(B)$ para quase todo o $\mathbf{y} \in A$;
   iii. A função $\mathbf{y} \mapsto \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x} \in L^1(B)$;
   iv. A função $\mathbf{x} \mapsto \int_B f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} \in L^1(A)$;
   v.
   $$\int_{A\times B} f = \int_A \left[\int_B f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}\right] d\mathbf{x} = \int_B \left[\int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x}\right] d\mathbf{y}.$$

3. Se $A \in \mathcal{M}$ é limitado e é dada uma *função densidade de massa* $\rho \in L^1(A)$, define-se:
   i. O *volume* n-dimensional de A:
   $$V = V_n(A) = \int_A dV_n.$$
   ii. *Significado geométrico do integral:* Se $f \in \mathcal{L}(A)$ é ≥ 0
   $$\int_A f = V_{n+1}(\{(\mathbf{x}, y) \in A \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(\mathbf{x})\})$$
   iii. A *massa* de A:
   $$M = \int_A \rho dV_n.$$
   iv. A coordenada k do *centro de massa* de A:
   $$x^k_{CM} = \frac{1}{M}\int_A x^k \rho dV_n.$$
   v. A coordenada k do *centróide* de A:
   $$\overline{x^k} = \frac{1}{V}\int_A x^k dV_n.$$
   vi. O *momento de inércia* de A em relação a um determinado eixo:
   $$I = \int_A d^2 \rho dV_n,$$
   onde $d(\mathbf{x})$ é a distância do ponto $\mathbf{x}$ ao eixo.

4. Teoremas de Convergência e Integrabilidade

1. *Teorema da Convergência Monótona de Levi:* Seja $A \in \mathcal{M}$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A tais que
$$0 \leq f_1(\mathbf{x}) \leq f_2(\mathbf{x}) \leq \dots \quad \text{q.t.p. em } A.$$
Se $f : A \to \mathbb{R}$ é tal que
$$\lim_{k\to+\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{q.t.p. em } A.$$
então
$$\int_A f(\mathbf{x}) = \lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(\mathbf{x})$$
(pode ser $+\infty$).
2. $\dfrac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}([1, +\infty[)$ *sse* $\alpha > 1$.
3. $\dfrac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}(]0, 1])$ *sse* $\alpha < 1$.
4. *Critério da comparação:* Se $f \in \mathcal{M}(A)$, $g \in \mathcal{L}(A)$ e $|f| \leq g$ q.t.p em A, então $f \in \mathcal{L}(A)$.
5. *Teorema de Tonelli:* Se A, B são intervalos, $f \in \mathcal{M}(A \times B)$ e o integral iterado $\int_A(\int_B |f(\mathbf{x}, \mathbf{y})|d\mathbf{y})d\mathbf{x}$ está definido e é finito, então $f \in \mathcal{L}(A \times B)$.
6. *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:* Seja $A \in \mathcal{M}$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é tal que
$$\lim_{k\to+\infty} f_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{q.t.p. em } A.$$
e existe $g \in \mathcal{L}(A)$ tal que
$$|f_k(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x}) \quad \text{q.t.p. em } A.$$
então $f \in \mathcal{L}(A)$ e
$$\int_A f(\mathbf{x}) = \lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(\mathbf{x}).$$
7. *Continuidade de integrais paramétricos:* Seja $A \subset E^n$ mensurável, $B \subset E^m$ um aberto não vazio e $f : A \times B \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é integrável em $\mathbf{x}$ para todo o $\mathbf{y} \in B$ e contínua em $\mathbf{y}$ para quase todo o $\mathbf{x} \in A$. Se existe $g \in \mathcal{L}(A)$ tal que
$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq g(\mathbf{x})$$
para $\mathbf{y}$ numa vizinhança de $\mathbf{y}_0 \in B$ então a função $F : B \to \mathbb{R}$ dada por
$$F(\mathbf{y}) = \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y})dV_n(\mathbf{x})$$
é contínua em $\mathbf{y}_0$.
Em particular, se A é compacto, e f é contínua então F é contínua em B.

8. *Regra de Leibniz:* Seja $A \subset E^n$ mensurável, $B \subset E^m$ um aberto não vazio e $f : A \times B \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é integrável em $\mathbf{x}$ para todo o $\mathbf{y} \in B$ e diferenciável em $\mathbf{y}$ para quase todo o $\mathbf{x} \in A$. Se existe $g \in \mathcal{L}(A)$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right| \leq g(\mathbf{x})$$

para $\mathbf{y}$ numa vizinhança de $\mathbf{y}_0 \in B$ então a função $F : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(\mathbf{y}) = \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_n(\mathbf{x})$$

tem derivada parcial em ordem a y_i em $\mathbf{y}_0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_n(\mathbf{x}).$$

Em particular, se A é compacto, e f é C^1 então F é C^1 em B e podemos aplicar a regra de Leibniz para calcular as derivadas parciais de F.

5. Mudança de Variáveis

1. Seja $U \subset E^n$ aberto; $\mathbf{g} : U \to E^n$ diz-se uma *mudança de coordenadas* ou uma *transformação regular* se é uma injecção C^1 com $\det D\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0 \ \forall_{\mathbf{x} \in U}$ (em particular, $\mathbf{g}$ tem inversa C^1, isto é, é um *difeomorfismo* entre U e a sua imagem). Diz-se que $\mathbf{g}^{-1}$ é um *sistema de coordenadas* para $\mathbf{g}(U)$.

2. *Teorema de Mudança de Variáveis:* Se $\mathbf{g} : U \subset E^n \to E^n$ é uma mudança de coordenadas e $A \subset U$ é mensurável,

$$\int_{\mathbf{g}(A)} f(\mathbf{x}) dV_n(\mathbf{x}) = \int_A f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \left| \det D\mathbf{g}(\mathbf{t}) \right| dV_n(\mathbf{t}).$$

A fórmula anterior significa em particular que $f \in \mathcal{L}(\mathbf{g}(A))$ *sse* $f \circ g \left| \det D\mathbf{g} \right| \in \mathcal{L}(A)$.

3. O *paralelipípedo* de lados $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in E^n$ é o conjunto fechado (portanto mensurável)

$$P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, 1]\}.$$

As propriedades da medida de Lebesgue implicam que

$$V_n(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)) = \left| \det[\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n] \right|.$$

4. *Coordenadas Polares* em E^2: São as coordenadas $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x, y) mediante a mudança de coordenadas

$$(x, y) = \mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r, \theta) = r.$$

5. *Coordenadas Cilíndricas* em E^3: São as coordenadas $(r,\theta,z) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x,y,z) mediante a mudança de coordenadas

$$(x,y,z) = \mathbf{g}(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r,\theta,z) = r.$$

6. *Coordenadas Esféricas* em E^3: São as coordenadas $(r,\theta,\varphi) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[$ relacionadas com as coordenadas Cartesianas usuais (x,y,z) mediante a mudança de coordenadas

$$(x,y,z) = \mathbf{g}(r,\theta,\varphi) = (r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi).$$

O Jacobiano desta transformação é

$$J\mathbf{g}(r,\theta,\varphi) = -r^2\operatorname{sen}\varphi.$$

III. Formas Diferenciais

1. Tensores

Todos os resultados seguintes são válidos substituindo E^n por um espaço vectorial V e a base canónica por uma base arbitrária $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ de V.

1. O *dual* de E^n é
$$(E^n)^* = \{\omega : E^n \to \mathbb{R} : \omega \text{ é linear}\}.$$
Os elementos de $(E^n)^*$ dizem-se *covectores-1*.
2. $(E^n)^*$ é um espaço vectorial de dimensão n. Uma base para $(E^n)^*$ é
$$\{\mathbf{e}^1,\ldots,\mathbf{e}^n\}$$
onde o 1-covector $\mathbf{e}^i$ é definido por
$$\mathbf{e}^i\left(v^1\mathbf{e}_1+\ldots+v^n\mathbf{e}_n\right) = v^i$$
(ou seja, $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = 1$ se $i=j$ e 0 caso contrário).
3. Um *k-tensor* (covariante) é uma aplicação $T : (E^n)^k \to \mathbb{R}$ multilinear, i.e., tal que
$$\begin{aligned}&T(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_i,\ldots,\mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_k) + T(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{w}_i,\ldots,\mathbf{v}_k);\\ &T(\mathbf{v}_1,\ldots,\lambda\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_k) = \lambda T(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_k)\end{aligned}$$
$(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k \in E^n,\ \lambda\in\mathbb{R},\ i=1,\ldots,n)$. $\mathcal{T}^k(E^n)$ designa o conjunto de todos os k-tensores em E^n.
4. Um k-tensor $\omega\in\mathcal{T}^k(E^n)$ diz-se *alternante*, ou um *k-covector*, se
$$\omega(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_j,\ldots,\mathbf{v}_k) = -\omega(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_j,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_k)$$
$(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k \in E^n,\ i,j=1,\ldots,n)$. $\Lambda^k(E^n)$ designa o conjunto de todos os k-covectores em E^n.

5. $\mathcal{T}^k(E^n)$ é um espaço vectorial e $\Lambda^k(E^n)$ é um subespaço vectorial de $T^k(E^n)$.
6. Se $S \in \mathcal{T}^k(E^n)$ e $T \in \mathcal{T}^l(E^n)$, o seu *produto tensorial* $S \otimes T \in \mathcal{T}^{k+l}(E^n)$ é dado por
$$S \otimes T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l) = S(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)\, T(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l)$$
$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l \in E^n)$.
7. *Propriedades do produto tensorial:* Se S, T, U são tensores e $\lambda \in \mathbb{R}$ então
   i. $(S+T) \otimes U = S \otimes U + T \otimes U$;
   ii. $S \otimes (T+U) = S \otimes T + S \otimes U$;
   iii. $(\lambda S) \otimes T = \lambda(S \otimes T) = S \otimes (\lambda T)$;
   iv. $S \otimes (T \otimes U) = (S \otimes T) \otimes U$;
   v. $S \otimes T \neq T \otimes S$.
8. $\dim\left(\mathcal{T}^k(E^n)\right) = n^k$, e uma base é $\left\{\mathbf{e}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}^{i_k}\right\}_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n}$.
9. *Pullback de um tensor por uma aplicação linear:* Se $f : E^n \to E^m$ é uma aplicação linear e $T \in \mathcal{T}^k(E^m)$, define-se $f^*(T) \in \mathcal{T}^k(E^n)$ por
$$f^*(T)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = T(f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_k)).$$
10. *Propriedades do pullback:* Se f, g são aplicações lineares e T, S tensores
    i. f^* é linear
    ii. $f^*(g^*(T)) = (g \circ f)^*(T)$
    iii. $f^*(T \otimes S) = f^*(T) \otimes f^*(S)$
11. Se $T \in \mathcal{T}^k(E^n)$, define-se
$$\operatorname{Alt}(T)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \operatorname{sgn}(\sigma) T\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}\right)$$
12. *Propriedades de* Alt*:*
    i. Se $T \in \mathcal{T}^k(E^n)$ então $\operatorname{Alt}(T) \in \Lambda^k(E^n)$;
    ii. $\operatorname{Alt} : \mathcal{T}^k(E^n) \to \Lambda^k(E^n)$ é linear;
    iii. Se $\omega \in \Lambda^k(E^n)$ então $\operatorname{Alt}(\omega) = \omega$.

    (Por outras palavras, $\operatorname{Alt} : \mathcal{T}^k(E^n) \to \Lambda^k(E^n)$ é uma projecção).
13. Se ω é um k-covector e η é um l-covector, o seu *produto exterior* é o (k+l)-covector
$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta).$$
14. *Propriedades do produto exterior:* Se ω, η, α e β são covectores de graus apropriados então
    i. $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$;
    ii. $\omega \wedge (c\eta) = c(\omega \wedge \eta)$ com $c \in \mathbb{R}$;
    iii. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ para $\omega \in \Lambda^k(E^n)$,$\eta \in \Lambda^l(E^n)$;
    iv. $\omega \wedge (\alpha \wedge \beta) = (\omega \wedge \alpha) \wedge \beta$.
15. $\mathbf{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_k} = k! \operatorname{Alt}\left(\mathbf{e}^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}^{i_k}\right)$
16. $\mathbf{e}^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^n(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n]$
17. Se f é linear $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.

18. $\dim \Lambda^k(E^n) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, e uma base é $\left\{\mathbf{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_k}\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$.

2. Formas diferenciais

1. Uma *k-forma diferencial* C^q em $U \subset E^n$ é uma função C^q $\omega : U \to \Lambda^k(E^n)$ (i.e., $\omega(\mathbf{x}) \in \Lambda^k(E^n)$ para todo o $\mathbf{x} \in U$). O conjunto das formas-k C^∞ em U designa-se por $\Omega^k(U)$. Convenciona-se que uma forma-0 é simplesmente uma função $U \to \mathbb{R}$.
2. Escreve-se dx^i para o elemento de $\Omega(U)$ que é constante igual a e^i.
3. Se $\mathbf{f} : U \to V$ é diferenciável e $\omega : V \to \Lambda^k(V)$ então o *pull-back* de ω por $\mathbf{f}$ é a k-forma $\mathbf{f}^*\omega \in \Omega^k(U)$ definida por

$$\mathbf{f}^*\omega(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))(D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \ldots, D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k)$$

   para $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in E^n$.
4. *Propriedades do pull-back:* Se ω e η são formas de graus apropriados então
   i. $\mathbf{f}^*(\omega + \eta) = \mathbf{f}^*\omega + \mathbf{f}^*\eta$;
   ii. $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = \mathbf{f}^*\omega \wedge \mathbf{f}^*\eta$.
5. Se $\omega \in \Omega^k(U)$ é uma forma-k,

$$\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x}) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

   a sua *derivada exterior* é a forma-(k+1)

$$d\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i}(\mathbf{x}) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

6. *Propriedades da derivada exterior:* Se ω e η são formas de graus apropriados então
   i. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$;
   ii. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, onde $\omega \in \Omega^k(U)$;
   iii. $d(d\omega) = 0$ (abreviadamente, $d^2 = 0$);
   iv. $d(\mathbf{f}^*\omega) = \mathbf{f}^*(d\omega)$, onde $\mathbf{f} : U \to V$ é diferenciável.
   v. Se $f : U \subset E^n \to E^n$, $\mathbf{f}^*(h dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n) = h \circ \mathbf{f} \det Df dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.
7. Por definição, $\Lambda^0(E^n) = \mathbb{R}$ e portanto as 0-formas $\Omega^0(E^n)$ são as funções C^∞ $g : E^n \to \mathbb{R}$. Se ω é uma k-forma e $\mathbf{f} : E^m \to E^n$ é C^∞ tem-se
   i. $g \wedge \omega = g\omega$;
   ii. $\mathbf{f}^*g = g \circ \mathbf{f}$;
   iii. $dg = \dfrac{\partial g}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \dfrac{\partial g}{\partial x^n} dx^n$.

   (em particular, $d(x^i) = dx^i$, o que justifica esta notação).
8. $\omega \in \Omega^k(E^n)$ diz-se *fechada* se $d\omega = 0$.
9. $\omega \in \Omega^k(E^n)$ diz-se *exacta* se existe uma forma $\eta \in \Omega^{k-1}(E^n)$ tal que $\omega = d\eta$ (η diz-se um *potencial* para ω).
10. ω exacta $\Rightarrow$ ω fechada.

11. $A \subset E^n$ diz-se *em estrela* se existe um ponto $\mathbf{x}_0 \in A$ (dito o *centro*) tal que $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subset A$ para todo o $\mathbf{x} \in A$, onde

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] = \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) : t \in [0, 1]\}$$

designa o segmento de recta de extremos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$.

12. *Lema de Poincaré:* Seja $\omega \in \Omega^k(U)$, onde $U \subset E^n$ é aberto. Se U é em estrela e ω é fechada, então ω é exacta.
13. $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \in \Omega^1(E^2 \setminus 0)$ é uma forma fechada mas não exacta.

IV. Integração em Variedades

1. Parametrizações, Cartas e Orientabilidade

1. Seja $M \subset E^n$ um conjunto, $\mathbf{x} \in M$ e $U \ni \mathbf{x}$ uma vizinhança aberta. $\mathbf{g} : V \subset E^m \to M \cap U$ diz-se uma *parametrização* de classe C^q de $M \cap U$ se é uma bijecção de classe C^q com $\mathbf{g}^{-1} : M \cap U \to V$ contínua e $\operatorname{rank} D\mathbf{g} = m$.
2. $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão m e classe C^q *sse* para todo o $\mathbf{x} \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \ni \mathbf{x}$ e uma parametrização de classe C^q $\mathbf{g} : V \subset E^m \to M \cap U$. Além disso, as colunas de $D\mathbf{g}(\mathbf{t})$ formam uma base para $T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M$.
3. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão M e $\mathbf{g} : U \subset M$ é uma aplicação de classe C^1, injectiva com derivada injectiva, então $\mathbf{g}$ é automáticamente uma parametrização de $\mathbf{g}(U)$.
4. Se $\mathbf{g} : V \subset E^m \to M \cap U$ é uma parametrização, a função contínua $\mathbf{g}^{-1} : M \cap U \to V$ diz-se uma *carta local* ou um *sistema de coordenadas para* $M \cap U$ e que $\mathbf{g}(V)$ é uma vizinhança de coordenadas.
5. Sejam $\mathbf{g} : V \subset E^m \to M \cap U$ e $\mathbf{h} : W \subset E^m \to M \cap U$ duas parametrizações, e $\varphi : M \cap U \to V$ e $\psi : M \cap U \to W$ as respectivas cartas locais. Então a mudança de carta local $\psi \circ \mathbf{g} : V \to W$ é de classe C^q e $\det D\psi \circ \mathbf{g} \neq 0$.
6. Duas bases $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ de um espaço vectorial V *têm a mesma orientação* se a matriz de mudança de base tem determinante positivo. "Ter a mesma orientação" é uma relação de equivalência no conjunto das bases. Uma *orientação para* V é uma das duas classes de equivalência (notadas $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$).
7. A *orientação canónica* de E^n é a orientação da base canónica de E^n.
8. Um elemento $\omega \in \Lambda^n(V) \setminus 0$ determina uma orientação μ de V da seguinte forma: $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \in \mu \iff \omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) > 0$.
9. Uma variedade-m $M \subset E^n$ diz-se *orientável* se existe uma forma-m $\omega : M \to \Lambda^m(E^n)$ contínua tal que $\omega|_{T_\mathbf{x}M} \neq 0$ para todo o $\mathbf{x} \in M$. Uma *orientação para* M é uma escolha de orientação para cada espaço tangente $T_\mathbf{x}M$ induzida por um ω satisfazendo as hipóteses anteriores.
10. Uma orientação para uma variedade-1 C corresponde a escolher um sentido em que a linha C é percorrida, ou equivalentemente, uma tangente unitária contínua.
11. Uma orientação para uma variedade-(n-1) $M \subset E^n$ corresponde a escolher uma normal unitária a M contínua. A orientação associada a uma normal unitária $\mathbf{u}$ é a determinada pela forma-(n-1)

$$\omega = u_1 \widehat{dx^1} \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n - \ldots + (-1)^{n-1} u_n dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^n}$$

isto é,

$$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ & \mathbf{v}_1 & \\ & \cdots & \\ & \mathbf{v}_{n-1} & \end{bmatrix}.$$

12. A banda de Möbius não é orientável.
13. A *orientação positiva*, denotada por $+$, de um aberto $U \subset E^n$ é a determinada pela forma $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. A orientação oposta escreve-se $-$.
14. Uma parametrização $\mathbf{g} : V \subset E^m \to M$ induz uma orientação em $\mathbf{g}(V)$, nomeadamente a dada por $[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^n}]$ em cada espaço tangente.
15. Se M é uma variedade orientável conexa, existem apenas duas orientações possíveis para M, pelo que a orientação de M é determinada pela orientação dada ao espaço tangente a M num único ponto.
16. Uma variedade $M \subset E^n$ é orientável sse pode ser coberta por vizinhanças de coordenadas $\mathbf{g}_i(U_i)$ tais que as orientações induzidas pelos $\mathbf{g}_i$'s em $\mathbf{g}_i(U_i) \cap \mathbf{g}_j(U_j)$ coincidem.

2. Integrais de Formas Diferenciais

1. Se $U \subset E^n$ é um aberto e $\omega : U \to \Lambda^n(U)$ é dada por $\omega = f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots dx^n$, define-se
$$\int_{U^+} \omega = \int_U f dV_n$$
2. Se $\mathbf{g} : V \subset E^m \to M \cap U$ é uma parametrização e $\omega \in \Omega^m(U)$, define-se o integral de ω ao longo de $A \subset M \cap U$ com a orientação μ induzida por $\mathbf{g}$ através de
$$\int_{A^\mu} \omega = \int_{\mathbf{g}^{-1}(A)^+} \mathbf{g}^* \omega.$$
3. O integral de uma forma-k depende apenas da orientação (é independente da escolha de parametrização desde que esta induza a orientação μ) e tem as propriedades habituais do integral.
4. Seja V um espaço vectorial com uma orientação e um produto interno. O *elemento de volume* para V associado a estes dados é o único tensor alternante $\omega \in \Lambda^n(V)$ tal que $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = 1$ se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base ortonormada com a orientação dada. Nesse caso $\omega(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$ é o volume orientado do paralelipípedo com arestas $\mathbf{w}_i$.
Uma fórmula para ω é dada por $\omega(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \pm \det[\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j]$ conforme a orientação da base $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ é a desejada ou não.
Se ω é o elemento de volume associado à orientação μ então $-\omega$ é o elemento de volume associado à orientação oposta.
5. Seja $M \subset E^n$ uma variedade-k e $A \subset M$ um subconjunto de M com uma orientação μ escolhida. Um *elemento de volume* para A^μ é uma forma $\omega : A \to \Lambda^k(E^n)$ tal que para todo o $\mathbf{x} \in A$, $\omega(\mathbf{x})|_{T_\mathbf{x} M}$ é o elemento de volume para $T_\mathbf{x} M$ determinado pela orientação μ e pelo produto interno em E^n.
É costume denotar um elemento de volume por dV_k. Para uma superfície, também se escreve dS em vez de dV_2 e para uma linha ds.

6. *Fórmula para o pullback do elemento de volume por uma parametrização:* Se $\mathbf{g}$: $U \to M$ é uma parametrização, e $dV_k \in \Omega^k(E^n)$ é um elemento de volume para M correspondente à orientação induzida por μ, então

$$\mathbf{g}^* dV_m = \sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m$$

onde a matriz $m \times m$ $G(\mathbf{t})$ é dada por

$$G_{ij} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j}.$$

7. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, $\mathbf{g} : V \subset E^m \to M \cap U$ é uma parametrização e $dV_m \in \Omega^m(E^n)$ é um elemento de volume para $\mathbf{g}(V)$ associado à orientação induzida por $\mathbf{g}$, define-se o integral de f ao longo de $A \subset M \cap U$ como

$$\begin{aligned}\int_A f dV_m &= \int_{\mathbf{g}^{-1}(A)^+} \mathbf{g}^*(f dV_m) = \int_{\mathbf{g}^{-1}(A)^+} f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m \\ &= \int_{\mathbf{g}^{-1}(A)^+} f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \sqrt{\det G(\mathbf{t})} dt^1 \ldots dt^m.\end{aligned}$$

Note-se que este integral é independente da orientação induzida por $\mathbf{g}$. Este integral tem as propriedades do costume.

8. *Aplicações dos integrais de campos escalares:* Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão m e é dada uma *função densidade de massa por unidade de volume m-dimensional* $\sigma : E^n \to [0, +\infty[$, define-se:
   i. O *volume* m-dimensional de M:

   $$V = V_m(M) = \int_M dV_m.$$

   ii. A *massa* de M:

   $$M = \int_M \sigma dV_m.$$

   iii. A coordenada k do *centro de massa* de M:

   $$x^k_{CM} = \frac{1}{M} \int_M x^k \sigma dV_m.$$

   iv. A coordenada k do *centróide* de M:

   $$\overline{x^k} = \frac{1}{V} \int_M x^k dV_m.$$

   v. O *momento de inércia* de M em relação a um determinado eixo:

   $$I = \int_M d^2 \sigma dV_m,$$

   onde $d(\mathbf{x})$ é a distância do ponto $\mathbf{x}$ ao eixo.

9. Se $\mathbf{F} : E^n \to E^n$ é um campo vectorial C^∞, definem-se $\omega_{\mathbf{F}} \in \Omega^1(E^n)$ e $\Omega_{\mathbf{F}} \in \Omega^{n-1}(E^n)$ através das fórmulas

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbf{F}} &= F^1 dx^1 + \ldots + F^n dx^n; \\ \Omega_{\mathbf{F}} &= F^1 dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n - \ldots + (-1)^{n-1} F^n dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}.\end{aligned}$$

10. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão 1, $\boldsymbol{\tau} : M \to E^n$ um vector tangente unitário e $\mathbf{F} : E^n \to E^n$ um campo vectorial C^∞,

$$\int_{M^\mu} \omega_{\mathbf{F}} = \int_M \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dV_1,$$

onde a orientação de M é a definida por $\boldsymbol{\tau}$. Este integral diz-se o *integral de linha* de $\mathbf{F}$ ao longo de M na direcção determinada por $\boldsymbol{\tau}$; no caso em que $\mathbf{F}$ é uma força, tem a interpretação física do trabalho realizado por $\mathbf{F}$ sobre uma partícula que percorre M na direcção determinada por $\boldsymbol{\tau}$. Outras notações para o integral de linha são $\int_M \mathbf{F} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ onde $\mathbf{r} :]a, b[\to M$ 'e uma parametrização. Substituindo a fórmula para o elemento de volume determinado pela parametrização obtem-se

$$\int_M \mathbf{F} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt.$$

11. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão $n-1$ e $\mathbf{n} : M \to E^n$ um vector normal unitário, $dV_{n-1} = \Omega_{\mathbf{n}}$ é um elemento de volume para M associado à orientação determinada por $\mathbf{n}$.
12. Se $M \subset E^n$ é uma variedade de dimensão $n-1$, $\mathbf{n} : M \to E^n$ um vector normal unitário e $\mathbf{F} : M \to E^n$ um campo vectorial,

$$\int_M \Omega_{\mathbf{F}} = \int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_{n-1},$$

onde a orientação de M é definida por $dV_{n-1} = \Omega_{\mathbf{n}}$. Este integral diz-se o *fluxo* de $\mathbf{F}$ através de M na direcção determinada por $\mathbf{n}$; no caso em que $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$, onde ρ e $\mathbf{v}$ são a densidade e velocidade de um fluido, tem a interpretação física da massa de fluido que atravessa M na direcção determinada por $\mathbf{n}$ por unidade de tempo.
13. Para verificar se uma determinada parametrização $\mathbf{g} : V \subset E^{n-1} \to M \cap U \subset E^n$ induz a orientação correspondente a uma normal unitária $\mathbf{n}$ (ou equivalentemente, determinada por $\Omega_{\mathbf{n}}$) basta verificar se

$$\mathbf{g}^* \Omega_{\mathbf{n}} = f(\mathbf{t}) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{n-1}$$

com $f > 0$ (basta verificar num ponto particular). Alternativamente, basta verificar se

$$\det \left(\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^{n-1}} \right) > 0.$$

Se $n = 3$, isto é equivalente a verificar se

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2} = f(\mathbf{t}) \mathbf{n}$$

com $f > 0$.
14. Se $\mathbf{g} : V \subset E^2 \to M \cap U \subset E^3$ é uma parametrização e dV_2 é um elemento de volume para M compassociado então

$$\mathbf{g}^* dV_2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2} \right\| dt^1 \wedge dt^2.$$

Em particular, o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F} : E^3 \to E^3$ através de $M \cap U$ na direcção de $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2}$ é dado por

$$\int_V \mathbf{F}\left(\mathbf{g}\left(t^1, t^2\right)\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2}\right) dt^1 \wedge dt^2 = \int_V \mathbf{F}\left(\mathbf{g}\left(t^1, t^2\right)\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^2}\right) dt^1 dt^2.$$

15. *Partição da unidade para um conjunto M:* Seja $\mathcal{O}$ uma cobertura aberta de $M \subset E^n$. Uma família de funções $\{\pi_i : E^n \to [0,1] \,|i = 1, \ldots, n, \ldots\}$ de classe C^∞ diz-se uma *partição da unidade para M subordinada à cobertura $\mathcal{O}$* se
    i. Para todo o $\mathbf{x} \in M$ existe uma vizinhança V de $\mathbf{x} \in E^n$ tal que $\pi_i|_V = 0$ excepto para um número finito de i's,
    ii. $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(\mathbf{x}) = 1$ para todo o $\mathbf{x}$,
    iii. Para cada i existe um aberto $U_i \in \mathcal{O}$ tal que $\pi_i = 0$ fora de U.

    Para quaisquer $M, \mathcal{O}$ existe uma partição da unidada para M subordinada a $\mathcal{O}$.
16. *Definição geral de integral de uma forma:* Se M é uma variedade-k, $A \subset M$ é um subconjunto com orientação μ, e $\omega : A \to \Lambda^k(E^n)$, define-se

$$\int_{A^\mu} \omega := \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A^\mu} \pi_i \omega$$

onde $\{\pi_i\}$ é uma partição da unidada para M subordinada a uma cobertura de M por vizinhanças de coordenadas.
Este integral é independente das escolhas e tem as propriedades habituais.

3. Teorema de Stokes

1. $M \subset E^n$ diz-se uma *variedade com bordo* de dimensão $k \geq 1$ (e classe C^q) se para todo o $\mathbf{x} \in M$, existe um aberto $U \subset E^n$ tal que uma das seguintes afirmações é verdadeira:
    (i) Existe um aberto $V \subset E^k$ e uma parametrização $\mathbf{g} : V \to M$ com $g(V) = M \cap U$.
    (ii) Existe um aberto $V \subset E^k$ contendo 0 e uma aplicação $\mathbf{g} : \{\mathbf{t} \in V : t^1 \leq 0\} \to M$ de classe C^1, injectiva, com derivada injectiva, com inversa contínua tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{g}(\{\mathbf{t} \in V : t^1 \leq 0\}) = M \cap U$.

    As hipóteses (i) e (ii) são mútuamente exclusivas. Define-se o *bordo de M* por $\partial M = \{\mathbf{x} \in M :$ (ii) se verifica$\}$. Então ∂M é uma variedade-(k-1) e a restrição de $\mathbf{g}$ a $\{x \in V : x^1 = 0\}$ é uma parametrização de ∂M.
2. ∂M pode ser $\varnothing$ logo esta definição contém a definição anterior de variedade.
3. Uma variedade M diz-se *fechada* se $\partial M = \varnothing$ e M é compacta.
4. $M \setminus \partial M$ é uma variedade-k no sentido usual.
5. Uma *orientação* para uma variedade com bordo M é uma orientação para $M \setminus \partial M$. Se M tem uma orientação μ, a *orientação induzida por μ em ∂M* é a orientação determinada pelas parametrizações $(x_2, \ldots, x_k) \to \mathbf{g}(0, x_2, \ldots, x_k)$ onde $\mathbf{g}|_{x^1<0}$ é uma parametrização do tipo (ii) que induz a orientação μ na sua imagem.
    Note-se que a orientação de $\{\mathbf{x} \in V : x^1 = 0\}$ determinada por $\{\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ é a orientação determinada nesta porção de plano pela normal e_1 (a normal exterior), e é esta que está a ser transportada por Dg para ∂M.
    No caso em que M é uma variedade-0 definimos o integral de uma forma-0 (uma função) sobre M como a soma dos valores da função sobre os pontos de M. Uma

orientação para M é simplesmente uma atribuição a cada ponto de M de um sinal $+$ ou $-$. A orientação induzida por uma variedade-1 no seu bordo atribui o sinal $+$ aos pontos do bordo que são pontos finais...

6. Se $\omega : M \to \Lambda^k(E^n)$ é uma forma-k e μ é uma orientação para M, define-se
$$\int_{M^\mu} \omega = \int_{(M\backslash\partial M)^\mu} \omega.$$
7. *Teorema de Stokes (Teorema Fundamental do Cálculo):* Se $M \subset E^n$ é uma variedade com bordo compacta orientável de dimensão k e $\omega \in \Omega^{k-1}(E^n)$ então
$$\int_{M^\mu} d\omega = \oint_{\partial M^\nu} \omega,$$
onde ν é a orientação induzida em ∂M por μ.
8. O teorema de Stokes *não* é válido se M não é compacta.
9. Se $M \subset U \subset E^n$ é uma variedade de dimensão k (sem bordo) compacta orientável e $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ então
$$\oint_M d\omega = 0$$
Pode-se usar isto para mostrar que uma forma não é exacta. ($\oint$ significa apenas que a região de integração é uma variedade compacta).
10. Se α é uma forma-(k-1) fechada em $U \subset E^n$ (aberto) e N *é um bordo em* U, isto é, existe $M \subset U$ tal que $\partial M = N$ (tendo em conta a orientação), então $\int_M \alpha = 0$. Pode-se usar isto para verificar que uma variedade não é um bordo.
11. *Casos particulares do Teorema de Stokes:*
    (i) *Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha:* Se M é uma variedade-1 com orientação μ e bordo $\{A^-, B^+\}$ e $f : M \to \mathbb{R}$ 'e um campo escalar de classe C^1, então
    $$\int_{M^m u} df = f(B) - f(A)$$
    .
    O integral da forma-1 é por definição o integral de linha do campo vectorial ∇f e então a fórmula anterior pode escrever-se
    $$\int_M \nabla f \cdot d\mathbf{g} = f(\mathbf{g}(b)) - f(\mathbf{g}(a)).$$
    (ii) *Teorema da divergência:* Se M é uma variedade-n compacta com bordo num aberto $U \subset E^n$ e $\omega : U \to \Lambda^{n-1}(E^n)$ é de classe C^1 então
    $$\int_{M^+} d\omega = \int_{\partial M^\mu} \omega$$
    onde μ é a orientação determinada em ∂M pela normal exterior a M.
    O integral da forma-(n-1) ω é por definição o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F} : U \to E^n$ tal que $\omega = \Omega_{\mathbf{F}}$ através de ∂M no sentido da normal exterior. Tem-se

$d(\Omega_{\mathbf{F}}) = (\nabla \cdot F) dx^1 \wedge \ldots dx^n$, onde $\nabla \cdot \mathbf{F}$ designa a *divergência* do campo $\mathbf{F}$, definida como o campo escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial F^n}{\partial x^n},$$

logo podemos escrever a fórmula de Stokes do seguinte modo:

$$\int_M \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_n = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_{n-1},$$

com $\mathbf{n}$ a normal unitária *exterior*.

12. *Significado físico da divergência:* Se $\mathbf{F}$ representa a densidade de fluxo de um fluido, $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})$ mede a densidade de massa de fluido que é criada no ponto $\mathbf{x}$.

4. Cálculo Vectorial em E^3

1. Se $\mathbf{F} : E^3 \to E^3$ é um campo vectorial de classe C^1, o seu *rotacional* é o campo vectorial

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right).$$

2. *Teorema de Stokes para Campos Vectoriais:* Se $\mathbf{F} : E^3 \to E^3$ é um campo vectorial de classe C^1 e M é uma superfície com bordo, então

$$\int_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dg},$$

onde ∂M deve ser percorrido no sentido tal que o produto externo do vector tangente ao bordo pela normal unitária $\mathbf{n}$ aponte *para fora* da superfície (ou equivalentemente quando se percorre a superfície com a cabeça a apontar no sentido da normal, a superfície encontra-se à esquerda).

3. *Regra da Mão Direita:* Uma maneira simples de recordar a relação entre as orientações da superfície e do seu bordo no Teorema de Stokes é a seguinte: desenhando um pequeno quadrado na superfície tal que um dos seus lados é um pedaço do bordo, a orientação correcta do bordo é a que induz a circulação ao longo dos lados do quadrado que fornece a normal unitária $\mathbf{n}$ por aplicação da regra da mão direita (fechando a mão direita no sentido da circulação no quadrado, o polegar aponta na direcção da normal).

4. *Lema de Poincaré para Campos Vectoriais:* Se $\mathbf{F} : U \subset E^3 \to E^3$ é um campo vectorial de classe C^2 e U é um conjunto em estrela então:
   i. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla f$ para algum campo escalar $f : U \to \mathbb{R}$ (dito um *potencial escalar* para $\mathbf{F}$);
   ii. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ para algum campo escalar $\mathbf{A} : U \to E^3$ (dito um *potencial vector* para $\mathbf{F}$).

5. *Dicionário Formas/Campos em E^3:*

i. Produtos:

$$\omega_{f\mathbf{F}} = f\omega_{\mathbf{F}};$$
$$\omega_{\mathbf{F}\times\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}};$$
$$\omega_{\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}} = \Omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \Omega_{\mathbf{G}}.$$

ii. Derivadas:

$$\omega_{\nabla f} = df;$$
$$\Omega_{\nabla\times\mathbf{F}} = d\Omega_{\mathbf{F}};$$
$$(\nabla \cdot \mathbf{F})dV_3 = d\Omega_{\mathbf{F}}.$$

iii. Integrais:

$$\int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_M \omega_{\mathbf{F}};$$
$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_M \Omega_{\mathbf{F}};$$

iv. Teoremas Sobre Derivadas: Se $f, \mathbf{F}$ são C^2:

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \text{ porque } d(df) = 0;$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \text{ porque } d(d\omega_{\mathbf{F}}) = 0.$$

v. Teoremas Sobre Integrais:

$$\int_M (\nabla f) \cdot d\mathbf{g} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \int_M df = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a});$$
$$\iint_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dg} \Leftrightarrow \int_M d\omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \omega_{\mathbf{F}};$$
$$\iiint_M (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV_3 = \oiint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 \Leftrightarrow \int_M d\Omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \Omega_{\mathbf{F}}.$$

5. Homologia

1. *Condição necessária e suficiente para uma forma-1 ser exacta:* Seja $U \subset E^n$ um aberto e $\omega : U \to \Lambda^1(E^n)$ uma forma-1 contínua. Então ω é exacta sse uma das condições equivalentes se verifica:
   (i) $\int_A^B \omega$ é independente da variedade-1 em U com extremos A, B.
   (ii) $\oint_C \omega = 0$ para toda a variedade-1 fechada C em U.
2. Em termos de integrais de campos vectoriais, o resultado anterior diz que um campo de forças $\mathbf{F}$ é conservativo (isto é o trabalho realizado ao longo de um caminho só depende dos extremos do caminho) sse $\mathbf{F} = \nabla V$, isto 'e se $\mathbf{F}$ admite um potencial.
3. *Corolário (Condição suficiente para que toda a forma-1 fechada seja exacta):* Se toda a variedade-1 fechada em $U \subset E^n$ é um bordo ent ao toda a forma-1 fechada é exacta.
   Qualquer aberto U em estrela por exemplo verifica esta condição, mas muitos outros (e.g. $E^3 \setminus 0$).

4. Duas variedades-k orientadas $M_1^{\mu_1}, M_2^{\mu_2}$ dizem-se *homólogas em* $U \subset E^n$ se existe uma variedade-(k+1) orientada $W^\lambda \subset U$ tal que

$$\partial W^\lambda = M_1^{\mu_1} \cup M_2^{-\mu_2}.$$

Isto é as orientações induzidas em M_1 e M_2 por λ são respectivamente μ_1 e $-\mu_2$.

5. *Corolário do Teorema de Stokes:* Se ω é uma forma-k fechada em U e $M_1^{\mu_1}$, $M_2^{\mu_2}$ são variedades-k homólogas em U então

$$\int_{M_1^{\mu_1}} \omega = \int_{M_2^{\mu_2}} \omega.$$

Este teorema é muito útil para o cálculo de integrais de formas fechadas porque nos permite substituir o cálculo de um integral sobre uma variedade pelo cálculo sobre uma variedade mais simples que lhe seja homóloga.

6. O seguinte resultado é muito mais difícil de provar: *Condição necessária e suficiente para que uma forma-k seja exacta:* $U \subset E^n$ um aberto e $\omega \in \Omega^k(U)$ uma forma-k. Então ω é exacta sse $\int_M \omega = 0$ para toda a variedade $M \subset U$ fechada.
A partir daqui o teorema de Stokes implica como anteriormente uma *condição suficiente para que toda a forma-k fechada seja exacta:* Se toda a variedade-k fechada $M \subset U$ 'e um bordo em U então toda a forma-k fechada é exacta.
Na realidade esta condição é quase necessária e suficiente. Há portanto uma relação muito estreita entre d e ∂!!!!
Exemplos: Em $E^3 \setminus 0$ uma superfície esférica centrada na origem não é um bordo logo não podemos aplicar o critério anterior. De facto existe uma forma-2 fechada e não exacta:

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dy \wedge dz + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz \wedge dx + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx \wedge dy.$$

Em $E^3 \{(0,0,)\}$ toda a variedade-2 fechada é um bordo logo toda a forma-2 fechada é exacta. Já não é esse o caso para formas-1.