Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TURMA ESPECIAL

TESTE PARA PRATICAR (1H30M)

apresente e justifique todos os cálculos

(3 val.) (1) Considere a transformação $g : E^2 \to E^2$ definida por $g(x, y) = (\sin xy, y^2 + x)$. Mostre que existe um aberto U contendo $(0, 1)$ tal que $g|_U$ é invertível. Sendo h a inversa de $g|_U$, calcule $Dh(0, 1)$.

(2) Seja $M = \{(x, y, z) \in E^3 : xyz = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade de dimensão 2 em E^3.

(2 val.) (b) Determine a recta normal a M no ponto $(1, 2, \frac{1}{2})$.

(3 val.) (c) Calcule o mínimo de $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ na região

$$\{(x, y, z) \in E^3 : xyz \geq 1, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

(3 val.) (3) Considere a região

$$V = \{(x, y, z, w) \in E^4 | \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq w \leq 1 - x^2 - y^2 - z^2, \text{ e } x, y, z \geq 0\}.$$

Escreva uma expressão para a medida de V em termos de integrais iterados na forma

$$\int \left(\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz \right) dw.$$

(3 val.) (4) Determine se a função

$$f(x) = \frac{\log |x - 1|}{x^2 + x + 1}$$

é integrável em $\mathbb{R}$.

(2 val.) (5) Utilizando a regra de Leibniz, mostre que a função zeta de Riemann, definida para $z > 1$ por

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \ .$$

é uma função de classe C^∞.

(2 val.) (6) Sejam $M, N \subset E^n$ variedades com $M \bigcap N \neq \emptyset$. Mostre que se para todo o $\mathbf{x} \in M \bigcap N$ se tem $T_{\mathbf{x}}M^\perp \bigcap T_{\mathbf{x}}N^\perp = \{0\}$ então $M \bigcap N$ é uma variedade.