Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TURMA ESPECIAL

RESOLUÇÃO DO PRIMEIRO TESTE

apresente e justifique todos os cálculos

(1) Seja $f : E^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y,z) = x^2y + e^x + z$.

(2 val.) (a) Mostre que existe uma função $g : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com U uma vizinhança de $(1,-1)$, tal que $g(1,-1) = 0$ e $f(g(y,z),y,z) = 0$.

(2 val.) (b) Calcule $\frac{\partial g}{\partial y}(1,-1)$.

Resolução:

(a) f é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. A derivada parcial em ordem a x é

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy + e^x.$$

Como $f(0,1,-1) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,-1) = 1 \neq 0$, o teorema da função implícita garante a existência de uma função g satisfazendo as condições do enunciado.

(b) Derivando a equação $f(g(y,z),y,z) = 0$ em ordem a y obtém-se

$$f_1(g(y,z),y,z)\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) + f_2(g(y,z),y,z) = 0.$$

Como

$$f_1(x,y,z) = 2xy + e^x, \quad f_2(x,y,z) = x^2,$$

substituindo $y = 1, z = -1$ obtém-se

$$1\frac{\partial g}{\partial y}(1,-1) + 0 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1) = 0.$$

(2) Considere o conjunto $M = \{(x,y,z) \in E^3 | y = x\tan z, -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}\}$.

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade.

(2 val.) (b) Determine o conjunto dos pontos $\mathbf{x} \in M$ tais que $T_{\mathbf{x}}M$ contém o eixo dos zz.

(3 val.) (c) Justifique que existe um ponto de M cuja distância ao ponto $(0,1,0)$ é mínima e calcule essa distância.

Resolução:

(a) A matriz Jacobiana da função

$$F(x,y,z) = y - x\tan z,$$

cujo conjunto de nível $F^{-1}(0)$ é M, é dada por

$$DF = \begin{bmatrix} -\tan z & 1 & -x\sec^2 z \end{bmatrix}.$$

Uma vez que esta matriz linha nunca se anula, a sua característica é 1 em todo o domínio de F. Logo M é uma variedade de dimensão 2 em E^3.

(b) O espaço tangente a M em (x, y, z) contém $(0, 0, 1)$ sse este vector pertence ao núcleo de $DF(x, y, z)$. Isto acontece nos pontos $(x, y, z) \in M$ onde

$$(-\tan z, 1, -x \sec^2 z) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow x \sec^2 z = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Os pontos da variedade que satisfazem $x = 0$ são os pontos tais que $y = 0 \cdot \tan z = 0$ e $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$. Portanto os pontos $\mathbf{x} \in M$ para os quais $T_{\mathbf{x}}M$ contém o eixo dos zz são os pontos da forma $(0, 0, z)$ com $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$.

(c) Note-se que uma vez que a origem pertence a M, a distância de $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ a M é certamente ≤ 1. Tomemos a bola fechada $\overline{B}_1(\mathbf{e}_2)$; uma vez que $1 < \frac{\pi}{2}$, o conjunto $M \cap \overline{B}_1(\mathbf{e}_2)$ é compacto. Uma vez que a distância a $\mathbf{e}_2$ é uma função contínua, tem um mínimo em $M \cap \overline{B}_1(\mathbf{e}_2)$ e este é um ponto de M cuja distância a $\mathbf{e}_2$ é mínima.

Uma vez que sabemos que existe um ponto de M que minimiza a função

$$f(x, y, z) = x^2 + (y - 1)^2 + z^2$$

(quadrado da distância a $\mathbf{e}_2$), sabemos que este será necessariamente uma solução do sistema dado pelo método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla(f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)) = \mathbf{0} \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda \tan z = 0 \\ 2(y - 1) + \lambda = 0 \\ 2z - \lambda x \sec^2 z = 0 \\ y - x \tan z = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $x = \frac{\lambda}{2} \tan z$, e da segunda $y = 1 - \frac{\lambda}{2}$. Usando a última equação, temos $x \tan z = 1 - \frac{\lambda}{2}$, e portanto $\frac{\lambda}{2} \tan^2 z = 1 - \frac{\lambda}{2}$. Recordando que $\tan^2 z + 1 = \sec^2 z$, obtemos $\frac{\lambda}{2} \sec^2 z = 1$. Portanto a terceira equaç ao implica que $x = z$. Dado que $\frac{\lambda}{2} = \cos^2 z$, a primeira equação fica $x = \sin z \cos z = \frac{1}{2} \sin(2z)$, e portanto $z = \frac{1}{2} \sin(2z)$. É fácil ver que a única solução desta equação é $z = 0$, e portanto $x = z = 0$. A equação da variedade implica então $y = 0$.

(3 val.) (3) Considere a região

$$V = \{(x, y, z, w) \in E^4 | (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1)^2 \leq w \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Escreva uma expressão para a medida de V em termos de integrais iterados na forma $\int \int (\int (\int dx) dy) dz) dw$.

Resolução: Claramente $0 \leq w \leq 1$ em V. Fixando w obtem-se $(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1)^2 \leq w$, ou seja,

$$1 - \sqrt{w} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1 + \sqrt{w} \quad x, y, z \geq 0$$

Trata-se da região limitada no primeiro octante, por duas superfícies esféricas de raios $1 - \sqrt{w}$ e $1 + \sqrt{w}$. Assim para cada w fixo, temos $0 \leq z \leq 1 + \sqrt{w}$. Para cada $z < 1 - \sqrt{w}$ fixo, x, y variam na coroa circular $(1 - \sqrt{w})^2 - z^2 \leq x^2 + y^2 \leq (1 + \sqrt{w})^2 - z^2,\ x, y \geq 0$, enquanto que para cada $1 - \sqrt{w} \leq z \leq 1 + \sqrt{w}$ fixo, x, y variam em $x^2 + y^2 \leq (1 + \sqrt{w})^2 - z^2,\ x, y \geq 0$.

Assim, uma expressão para a medida é dada por

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-\sqrt{w}} \left(\int_0^{\sqrt{(1-\sqrt{w})^2-z^2}} \left(\int_{\sqrt{(1-\sqrt{w})^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{(1+\sqrt{w})^2-z^2-y^2}} 1dx \right) dy + \int_{\sqrt{(1-\sqrt{w})^2-z^2}}^{\sqrt{(1-\sqrt{w})^2+z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{(1+\sqrt{w})^2-z^2-y^2}} 1dx \right) dy \right) + \int_{1-\sqrt{w}}^{1+\sqrt{w}} \left(\int_0^{\sqrt{(1+\sqrt{w})^2-z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{(1+\sqrt{w})^2-z^2-y^2}} 1dx \right) dy \right) dz \right) dw \; .$$

(3 val.) (4) Calcule para todo o $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^{n+1}} dx.$$

Sugestão: Aplique a regra de Leibniz à função

$$\phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha x^2} dx.$$

Resolução: Para todo o $n \geq 0$ temos

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{1}{1+\alpha x^2} \right) = \frac{(-1)^n n! x^{2n}}{(1+\alpha x^2)^{n+1}}.$$

Os integrais a calcular são a menos de uma constante, os integrais destas funções quando $\alpha = 1$. Note-se que, para $|x| \geq 1$ e $\alpha > 0$,

$$\frac{x^{2n}}{(1+\alpha x^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{1+\alpha x^2} \cdot \frac{1}{\alpha^n} \leq \frac{1}{\alpha^{n+1} x^2}.$$

Seja então

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ \frac{2^{n+1}}{x^2} & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Então h é integrável em $\mathbb{R}$ e para $\alpha \geq \frac{1}{2}$ tem-se

$$\left| \frac{(-1)^n n! x^{2n}}{(1+\alpha x^2)^{n+1}} \right| \leq n! h(x).$$

Pela regra de Leibniz, ϕ é diferenciável para $\alpha > \frac{1}{2}$ e

$$\frac{d^n \phi}{d\alpha^n}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n n! x^{2n}}{(1+\alpha x^2)^{n+1}} dx.$$

Por outro lado, pelo Teorema da convergência monótona, temos

$$\phi(\alpha) = \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \frac{1}{1+\alpha x^2} dx = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan(\sqrt{\alpha} x) \Big|_{-k}^{k} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$$

logo

$$\frac{d^n \phi}{d\alpha^n}(\alpha) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)\pi}{2^n \alpha^{\frac{2n+1}{2}}}$$

pelo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)\pi}{2^n n!}.$$

(5) Seja $A \subset E^n$ um conjunto mensurável e $p \in \mathbb{R}$ tal que $p \geq 1$. Define-se o conjunto

$$\mathcal{L}^p(A) = \{ f \in M(A) \ : \ |f(x)|^p \text{ é integrável em } A \}$$

(1.5 val.) (a) Mostre que $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$.

(1.5 val.) (b) Mostre que se $V(A) < \infty$ e $p > q$ então $L^p(A) \subset L^q(A)$.

Resolução:

(a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{]0,1]}(x)$$

pertence a $L^1(\mathbb{R})$ mas não a $L^2(\mathbb{R})$. Por outro lado, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{x} \chi_{[1,+\infty[}(x)$$

pertence a $L^2(\mathbb{R})$ mas não a $L^1(\mathbb{R})$.

(b) Seja $f \in M(A)$, tal que $|f|^p$ é integrável. Temos que ver que $|f|^q$ é integrável. Seja

$$g(x) = \begin{cases} |f(x)|^p & \text{se } |f(x)| > 1 \\ 1 & \text{se } |f(x)| \leq 1 \end{cases}$$

Como f é mensurável em A, g também é, e por definição de g, tem-se $|f|^q \leq g$ (uma vez que para $a \geq 1$ se tem $a^q \leq a^p$). Seja $B = \{x \in A : |f(x)| > 1\}$. Por hipótese sobre f, g é integrável em B. Uma vez que A tem medida finita, g é também integrável em $A \setminus B$. Conclui-se que g é integrável em A e logo, pelo critério da comparação, $|f|^q$ é integrável em A.