Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

CIVIL

2º EXAME – 12 DE JULHO DE 2000 DAS 9H ÀS 12H.

apresente e justifique todos os cálculos

(1) (1) Determine o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ onde $f(z) = z - \overline{z} + i(z + \overline{z})$ é diferenciável.

(1.5) (2) (a) Determine e classifique as singularidades de

$$f(z) = \frac{z+\pi}{e^{iz}+1} + \frac{1}{(z-i)^2}.$$

(1) (b) Desenvolva a função

$$g(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$$

em série de Laurent na região $|z| > 1$.

(1.5) (3) Calcule o integral real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx.$$

(1.5) (4) (a) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = t^2(1+y^2), \quad y(0) = 0.$$

Indique o intervalo de definição desta solução.

(1.5) (b) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$y\cos t + (2y + \sin t)\frac{dy}{dt} = 0.$$

(1) (5) Esboce o campo de direcções e o traçado gráfico das soluções da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y \sin y.$$

Quais são os possíveis limites das soluções quando $t \to \pm\infty$?

(1) (6) Determine se existe uma função $f(z)$, analítica no disco fechado de raio 1 centrado na origem, tal que o desenvolvimento de Fourier da função $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(\theta) = f(e^{i\theta})$$

é dado por

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} e^{in\theta}.$$

(7) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} .$$

(1.5) (a) Calcule e^{At}.

(1.5) (b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(1.5) (8) Utilizando o método dos coeficientes indeterminados, calcule a solução geral de

$$y^{(2)} - 6\dot{y} + 9y = 18$$

e determine a solução particular que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 3 \qquad \text{e} \qquad \dot{y}(0) = 4 .$$

(1.5) (9) (a) Determine as soluções da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$ do seguinte problema de valor na fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 . \end{cases}$$

(1) (b) Baseando-se no resultado da alínea anterior, calcule a solução de:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(t,0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t,1) = \sin 1 \\ u(0,x) = \sin x + \sin(\pi x) . \end{cases}$$

(1) (10) Determine uma função $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ com transformada de Laplace

$$Y(s) = \frac{1}{(s-3)^3} + \frac{3s+4}{(s^2+4)(s-3)} e^{-5s}.$$

(1) (11) Seja $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma solução não identicamente nula da equação

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$

Sem resolver a equação, mostre que a norma euclideana de y, $||y(t)||$, é estritamente crescente.

(1) (12) Seja $g(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, uma função contínua com $g(-\pi) = g(\pi)$ e série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

Seja $f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, com $f(-\pi) = f(\pi)$, uma solução da equação diferencial

$$f'' + kf = g ,$$

onde a constante real $k > 0$ satisfaz $k \neq n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Escreva a série de Fourier de f em termos dos $a_n's$, $b_n's$ e k e demonstre que ela converge em todo o $[-\pi, \pi]$.

Respostas (omitindo algumas justificações):

(1) Tem-se $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ com $u(x,y) = 0$ e $v(x,y) = 2(x+y)$. Uma vez que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 2$, as equações de Cauchy-Riemann nunca são satisfeitas e, portanto, f não é diferenciável em qualquer ponto $z \in \mathbb{C}$.

(2) (a) As singularidades de $f(z)$ são $z = i$ e as soluções da equação $e^{iz}+1 = 0 \iff z = \pi+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. A função $f(z)$ tem um pólo duplo em $z = i$ porque $\lim_{z\to i}(z-i)^2 f(z) = 1$. Aplicando a regra de Cauchy, $\lim_{z\to\pi+2k\pi}(z-\pi-2k\pi)f(z) = 2\pi(1+k)i$. Conclui-se que as singularidades $z = \pi+2k\pi$ com $k \neq -1$ são pólos simples porque nesse caso o limite não se anula. Para $k = -1$ o limite anula-se logo $z = -\pi$ é uma singularidade removível.

(b) Tem-se $\frac{1}{(z-i)^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-i}\right)$. Uma vez que $\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}$ para $\left|\frac{i}{z}\right| < 1$, ou seja, para $|z| > 1$. Derivando termo a termo obtém-se $\frac{1}{(z-i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)i^n}{z^{n+2}}$ para $|z| > 1$.

(3) Considera-se o caminho γ_R definido pela fronteira da região $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0, |z| < R\}$ percorrida no sentido positivo. Pelo teorema dos resíduos, tem-se para todo o $R > 1$, $\int_{\gamma_R}\frac{z^2}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}\left(\frac{z^2}{z^4+1}\right) + \operatorname{Res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}\left(\frac{z^2}{z^4+1}\right)\right)$. Ambas as singularidades no interior de γ_R são pólos simples, portanto $\operatorname{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}\left(\frac{z^2}{z^4+1}\right) = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\frac{(z-e^{i\frac{\pi}{4}})z^2}{z^4+1} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4}$ e da mesma forma $\operatorname{Res}_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}}\left(\frac{z^2}{z^4+1}\right) = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4}$. Designando por C_R a porção de γ_R correspondente à semicircunferência, tem-se portanto

$$\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx + \int_{C_R}\frac{z^2}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4} + \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Como $\left|\int_{C_R}\frac{z^2}{z^4+1}\,dz\right| \leq \pi R\cdot\frac{R^2}{R^4-1} \to 0$ quando $R\to\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(4) (a) A equação é separável. Dividindo por $1+y^2$ e integrando de 0 a t tem-se

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dt} = t^2 \iff \arctan y = \frac{t^3}{3} \iff y(t) = \tan(t^3).$$

O intervalo de definição é o maior intervalo contendo 0 e contido no domínio da função tangente. Isto é, é o conjunto $\{t \in \mathbb{R} : \left|\frac{t^3}{3}\right| < \frac{\pi}{2}\} =]-\sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}, +\sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}[$.

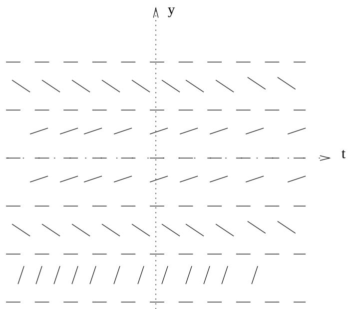
(b) Uma vez que $\frac{\partial}{\partial y}(y\cos t) = \cos t = \frac{\partial}{\partial t}(2y+\sin t)$, trata-se de uma equação exacta. Logo, a solução é dada implicitamente por $F(t,y) =$ const. onde

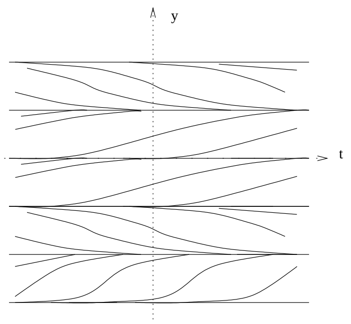
$$F(t,y) = \left\{\begin{array}{l}\int(y\cos t)\,dt + f(y)\\ \int(2y+\sin t)\,dy + g(t)\end{array}\right\} = y^2 + y\sin t, \qquad \text{por exemplo}.$$

Conclui-se que a solução geral da equação é dada por

$$y^2 + y\sin t = c \iff y(t) = \frac{-\sin t \pm\sqrt{\sin^2 t + 4c}}{2}.$$

(5) Tendo em conta o gráfico da função $y\sin y$ obtém-se o seguinte campo de direcções e traçado gráfico das soluções:





Do traçado gráfico conclui-se que os possíveis limites das soluções quando $t\to\pm\infty$ são $k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$.

(6) Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$ fôr uma função analítica no disco fechado de raio 1, $g(\theta) = f(e^{i\theta})$ verifica a igualdade do enunciado. Uma vez que o raio de convergência da série de potências acima é $R = \lim_{n\to\infty}\frac{n2^{n+1}}{(n+1)2^n} = 2$, a série define uma função analítica $f(z)$ em $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ e portanto a resposta à questão do enunciado é afirmativa.

Continuação das respostas (omitindo algumas justificações):

(7) (a) Uma decomposição de Jordan de A é $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}$.

Logo,

$$e^{At} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1+e^{-2t}}{2} & \frac{1-e^{-2t}}{2} & 0 \\ \frac{1-e^{-2t}}{2} & \frac{1+e^{-2t}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}.$$

(b) A solução é dada, por exemplo, pela fórmula de variação das constantes:

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{bmatrix} e^{-2s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{e^{-2s}+e^{-2t}}{2} \\ \frac{e^{-2s}-e^{-2t}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \frac{1-e^{-2t}}{4} + \frac{te^{-2t}}{2} \\ \frac{1-e^{-2t}}{4} - \frac{te^{-2t}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(8) A equação escreve-se $(D-3)^2 y = 18$. O aniquilador do segundo membro é D, portanto as soluções deste problema são da forma $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + c_3$. As duas primeiras parcelas formam a solução geral da equação homogénea. Substituindo c_3 na equação obtém-se a solução particular $y_p(t) = 2$. Portanto a solução geral é $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + 2$. Substituindo nas condições iniciais dadas obtém-se $c_1 = c_2 = 1$ portanto a solução do PVI é: $y(t) = te^{3t} + e^{3t} + 2$.

(9) (a) Substituindo $u(t,x) = T(t)X(x)$ na equação, conclui-se que os factores satisfazem o sistema de equações $T'(t) = kT(t)$, $X''(x) = (k-1)X(x)$ para algum $k \in \mathbb{R}$. Das condições na fronteira $T(t)X(0) = T(t)X(1) = 0$, obtém-se $X(0) = X(1) = 0$ para soluções não identicamente nulas. Para que exista uma solução não identicamente nula da equação para $X(x)$ satisfazendo as condições na fronteira, tem que ser $k - 1 < 0$ e portanto $X(x) = A\cos(\sqrt{1-k}x) + B\sin(\sqrt{1-k}x)$. Impondo $X(0) = X(1) = 0$, tem-se $A = 0$ e, para soluções não identicamente nulas, $\sqrt{1-k} = n\pi \iff k = 1 - n^2\pi^2$ para $n = 1, 2, \ldots$. Conclui-se que as soluções são os múltiplos reais de $u_n(t,x) = e^{(1-n^2\pi^2)t}\sin(n\pi x)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Primeiro procura-se uma solução estacionária $u_p(t,x) = v(x)$ da equação diferencial que satisfaça as condições na fronteira $u_p(t,0) = 0$, $u_p(t,1) = \sin 1 \iff v(0) = 0$, $v(1) = \sin 1$. Substituindo na equação vem $v''(x) + v(x) = 0 \iff v(x) = A\cos x + B\sin x$. As condições fronteira impõem $A = 0, B = 1$, logo $v(x) = \sin x$. Depois escreve-se $u(t,x) = v(x) + u_h(t,x)$. Por linearidade, u_h é solução da equação diferencial e verifica $u_h(t,0) = u_h(t,1) = 0$, $u_h(0,x) = \sin(\pi x)$. Da alínea anterior conclui-se que podemos tomar $u_h(t,x) = u_1(t,x) = e^{(1-\pi^2)t}\sin(\pi x)$ portanto a solução do problema é $u(t,x) = \sin x + e^{(1-\pi^2)t}\sin(\pi x)$.

(10) Uma vez que $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) = \frac{t^2}{2}$, tem-se $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^3}\right) = \frac{t^2}{2}e^{3t}$. Por outro lado, $\frac{3s+4}{(s^2+4)(s-3)} = -\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s-3}$, portanto $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+4}{(s^2+4)(s-3)}e^{-5s}\right) = (-\cos(2(t-5)) + e^{3(t-5)})H_5(t)$. Conclui-se que

$$y(t) = \frac{t^2}{2}e^{3t} + (-\cos(2t-10) + e^{3t-15})H_5(t).$$

(11) Basta mostrar que a derivada de $||y||^2$ é sempre positiva:

$$\frac{d}{dt}||y||^2 = 2y_1\dot{y}_1 + 2y_2\dot{y}_2 = 2y_1^2 - 4y_1y_2 + 4y_2^2 > 0 \quad \text{desde que} \quad (y_1, y_2) \neq (0,0)\ .$$

Isto deve-se ao facto de a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática anterior ter valores próprios positivos. Pelo teorema de Picard, a solução identicamente nula é a única que passa por $(0,0)$. Logo, para qualquer solução não identicamente nula da equação, tem-se que $\frac{d}{dt}||y(t)||^2 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(12) Pela fórmula de variação das constantes, sabemos que existe uma solução f tal que f, f' e f'' são funções contínuas que tomam o mesmo valor em $\pm\pi$. Todas estas funções têm séries de Fourier convergentes e os coeficientes de Fourier de f'' podem obter-se a partir dos coeficientes de f derivando (formalmente) termo a termo duas vezes. Seja $f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos(nx) + d_n\sin(nx))$ o desenvolvimento em série de Fourier de f. Substituindo na equação obtém-se

$$\frac{kc_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2+k)(c_n\cos(nx) + d_n\sin(nx)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

portanto, pela unicidade do desenvolvimento de Fourier, conclui-se que

$$a_0 = kc_0, \quad c_n = \frac{a_n}{k-n^2}, \quad d_n = \frac{b_n}{k-n^2}.$$

Note-se que se $k = 0$ tem-se necessáriamente $a_0 = 0$ (porque g é uma derivada) e então c_0 é arbitrário. A solução geral do problema obtém-se para $k > 0$ (resp. $k < 0$) somando a f um múltiplo real de $\cos(\sqrt{k}x)$ (resp. $\cosh(\sqrt{-k}x)$). Portanto há que somar aos coeficientes acima um múltiplo real dos coeficientes do desenvolvimento de Fourier destas funções.