Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV - CIVIL

TESTE 1 - 6 DE MAIO DE 2000 - DAS 11H ÀS 12:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

(2) (1) Seja $u(x,y) = e^{2x}\cos 2y$. Determine $v(x,y)$ tal que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ seja analítica em $\mathbb{C}$ e calcule $f'(1+\frac{\pi}{4}i)$.

(2) Seja f a função definida por

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} + \frac{1}{2-z}$$

(2) (a) Determine e classifique as singularidades de f.

(2) (b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido para $|z| > 2$.

(3) Seja γ_R a curva fechada simples dada pela fronteira do semicírculo

$$D_R = \{z = \rho e^{i\theta} : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

de raio $R > 1$ percorrida no sentido positivo.

(2) (a) Calcule o integral

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz.$$

(3) (b) Calcule o integral real

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx.$$

(2) (4) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = e^{-t^2}.$$

(3) (5) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$2y^2 - 9ty + (2ty - 3t^2)\frac{dy}{dt} = 0 \quad , \quad y(1) = 3.$$

(2) (6) Determine se existe uma única solução para o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = e^y + |\sin y| \quad , \quad y(1) = 0.$$

(2) (7) Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica tal que

- $\lim_{z\to\infty} f(z)$ existe e é finito,
- $\oint_\gamma \frac{f(z)}{\sin^2 z}\, dz = 1$ onde γ é a circunferência de raio 1 centrada na origem orientada no sentido positivo.

Mostre que a singularidade de $f(z)$ em $z = 0$ não é removível.