Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

CIVIL

TESTE 1 PARA PRATICAR
DURAÇÃO: 1H30

Apresente e justifique todos os cálculos

(2) (1) Seja $f(z) = |z|^2 - \dfrac{\overline{z}^2}{2}$. Determine o subconjunto de $\mathbb{C}$ onde f é diferenciável.

(2) Seja γ_R a fronteira da região $D_R = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < r < R\ ,\ 0 < \theta < \frac{2\pi}{3}\}$, com $R > 1$, à qual se atribui a orientação positiva. Seja $g(z) = \dfrac{z}{z^3+1}$.

(2) (a) Determine e classifique as singularidades de $g(z) + \frac{1}{z \sin z}$.

(2) (b) Desenvolva g em série de Laurent na região $|z| > 1$.

(2) (c) Calcule o integral

$$\oint_{\gamma_R} g(z)\ dz\ .$$

(3) (d) Calcule o integral real

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\ dx\ .$$

(2) (3) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$(1+t^2)^2 e^y \frac{dy}{dt} = -2t\ .$$

(3) (4) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$t^2 y - (t^3 + y^3)\frac{dy}{dt} = 0\ , \qquad y(1) = 2\ .$$

(2) (5) Mostre que o problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y + \sin(y^2) \quad , \quad y(0) = 0$$

tem uma única solução e que esta está definida em todo o $\mathbb{R}$.

(2) (6) Seja $p(z)$ um polinómio de grau n com n raízes distintas $z_1, ..., z_n$ $(n \geq 1)$. Mostre que:

$$\frac{1}{p(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{Res}(\frac{1}{p(z)}, z_k)}{z - z_k}\ .$$

Respostas sumárias (omitindo algumas justificações):

(1) $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ com $u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2$ e $v(x,y) = xy$. As equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas sse $y = 0$. Como u e v são continuamente diferenciáveis, f é diferenciável em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$.

(2) (a) $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{z^{3k+2}}$ para $|z| > 1$.

(b) Pólos simples em $e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\frac{5\pi i}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Pólo de ordem 2 em $z = 0$. Pólos simples em $z = k\pi$ para k um inteiro não nulo (note-se que $\sin z = 0 \iff z = k\pi$ com k inteiro).

(c) A única singularidade de $g(z)$ no interior de γ é $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$. Pelo teorema dos resíduos tem-se

$$\oint_{\gamma_R} g(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{e^{\frac{\pi i}{3}}} \left(\frac{z}{z^3+1}\right) = \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3}i \ .$$

(d) Seja Γ_R a porção de γ_R parametrizada por $Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$. Então

$$\left|\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz\right| \le \int_{\Gamma_R} |g(z)|ds \le \frac{R}{R^3-1} \cdot \frac{2\pi}{3}R$$

e portanto quando R tende para ∞, $\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz \to 0$. Parametrizando os segmentos de recta que fazem parte de γ_R tem-se

$$\oint_{\gamma_R} g(z)dz = \int_0^R \frac{x}{x^3+1}\,dx + \int_{\Gamma_R} g(z)\,dz - \int_0^R \frac{e^{\frac{2\pi}{3}i}x}{x^3+1} \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}\,dx \ .$$

Fazendo R tender para $+\infty$ tem-se

$$\left(1 - e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx = \frac{2\pi i}{3}e^{-i\frac{\pi}{3}} \iff \int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \ .$$

(3) A equação é separável. Separando variáveis e integrando obtém-se

$$y(t) = \ln\left(\frac{1}{1+t^2} + k\right)$$

onde $k > -1$ é uma constante. Os intervalos de definição das soluções são $\mathbb{R}$ se $k \ge 0$ e $\left]-\sqrt{-\frac{1}{k}-1}, \sqrt{-\frac{1}{k}-1}\right[$ se $-1 < k < 0$, respectivamente.

(4) A equação é redutível a exacta: um factor de integração é $\mu(y) = y^{-4}$ definido para $y \neq 0$. Um potencial para a equação exacta obtida após multiplicar por $\mu(y)$ é $\varphi(t,y) = \frac{t^3}{3y^3} - \ln|y|$. Como $\frac{\partial\varphi(1,2)}{\partial y} \neq 0$, o teorema da função implícita garante que a solução do problema de valor inicial fica definida numa vizinhança de $(t_0,y_0) = (1,2)$ pela equação

$$\frac{t^3}{3y^3} - \ln y = \frac{1}{24} - \ln 2 \ .$$

(5) Uma vez que $f(t,y) = 1 + y + \sin(y^2)$ é contínuamente diferenciável, o teorema de Picard garante que existe uma única solução do problema de valor inicial. Como $y \le f(t,y) \le y+2$, se y_1 e y_2 designarem as soluções dos problemas de valor inicial

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 \quad, y_1(0) = 0 \quad ; \quad \frac{dy_2}{dt} = y_2 + 2 \quad, y_2(0) = 0$$

tem-se $y_1(t) \le y(t) \le y_2(t)$ para $t \ge 0$ e $y_2(t) \le y(t) \le y_1(t)$ para $t \le 0$. Como y_1 e y_2 estão definidas em $\mathbb{R}$ conclui-se que y também está.

(6) Seja $f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{Res}(\frac{1}{p(z)}, z_k)}{z - z_k}$. A função $\frac{1}{p(z)}$ tem pólos simples em cada um dos pontos $z_1, \ldots, z_n$. Como $\lim_{z\to z_k}\left(f(z) - \frac{1}{p(z)}\right)$ é finito para $1 \le k \le n$ (porque as singularidades de ambos os lados são pólos simples e os resíduos são iguais), todas as singularidades de $f(z) - \frac{1}{p(z)}$ são removíveis. Seja $h(z)$ o prolongamento analítico de $f(z) - \frac{1}{p(z)}$ a $\mathbb{C}$. Então $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0 - 0 = 0$. Portanto, pelo teorema de Liouville, $h(z)$ tem que ser constante igual a 0, isto é $f(z) = \frac{1}{p(z)}$, conforme se pretendia demonstrar.