

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – CIVIL

FICHA 1 – NÚMEROS E FUNÇÕES COMPLEXAS

para entregar na aula teórica de **6<sup>a</sup> feira, 24 de Março**

(1) Calcule  $\sqrt{i}$ ,  $\sqrt[3]{i}$  e  $\sqrt[4]{i}$  e represente estes números geometricamente.

(2) Esboce os seguintes conjuntos e diga quais deles são regiões:

- (a)  $|z - 2 + i| \leq 1$  ;
- (b)  $|2z + 3| > 4$ ;
- (c)  $\text{Im } z > 1$ ;
- (d)  $\text{Im } z = 1$ ;
- (e)  $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$  ( $z \neq 0$ ) ;
- (f)  $|z - 4| \geq |z|$  .

(3) Resolva a seguinte equação

$$1 + 3z + 3z^2 + z^3 = 3\sqrt{3} \left( e^{-i\pi} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) .$$

(4) Seja  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ .

- (a) Mostre que  $u$  é harmónica.
- (b) Exiba uma função  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

seja analítica e satisfaça  $f(0) = 0$ .

(5) Seja  $f(z) = (x^2 - y^2) + 2i|xy|$  para  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .

- (a) Estude a analiticidade de  $f(z)$ .
- (b) Calcule  $f'(z)$  nos pontos onde  $f(z)$  é analítica.

(6) Exprima  $\cos 3\varphi$  e  $\sin 4\varphi$  em termos de  $\cos \varphi$  e  $\sin \varphi$ .

(7) Mostre que, para  $z = x + yi$ , se tem

$$|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x .$$

(8) Escreva todos os valores de  $i^i$  na forma  $a + bi$ .