

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – CIVIL

FICHA 2 – ANÁLISE COMPLEXA

para entregar na aula teórica de **6ª feira, 7 de Abril**

(1) Para cada um dos seguintes conjuntos $Z \subset \mathbb{C}$, esboce o conjunto

$$W = \{w \in \mathbb{C} : e^w \in Z\}$$

dos seus logaritmos.

- (a) $Z = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$;
- (b) $Z = \mathbb{R}$;
- (c) $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| = e, \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}\}$.

(2) Calcule pela definição

$$\int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz ,$$

onde γ é a semicircunferência ou circunferência parametrizada por:

- (a) $z = 2e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$;
- (b) $z = 2e^{i\theta}, \pi \leq \theta \leq 2\pi$;
- (c) $z = 2e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(3) Seja γ a circunferência de raio 1 centrada na origem percorrida uma vez no sentido positivo. Usando o teorema de Cauchy e as fórmulas integrais de Cauchy, calcule os seguintes integrais:

(a)

$$\int_{\gamma} 1 dz ;$$

(b)

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz ;$$

(c)

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z-2i)^7} dz ;$$

(d)

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(2z-i)^6} dz .$$

...continua...

(4) Determine a série de Taylor em torno da origem de cada uma das seguintes funções, indicando o raio de convergência.

(a) $f(z) = \frac{1}{1-z}$;

(b) $f(z) = e^{z+2}$;

(c) $f(z) = \begin{cases} \cos z & \text{se } \operatorname{Re} z < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(5) Determine as séries de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

válidas nas seguintes regiões:

(a) $0 < |z| < 1$;

(b) $|z| > 1$;

(c) $0 < |z - 1| < 1$;

(d) $|z - 1| > 1$.

(6) Seja f a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{2+z} + \frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z}.$$

(a) Determine e classifique as singularidades de f .

(b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido para $0 < |z| < 2$.

(c) Calcule o integral de f ao longo da circunferência de raio 1 centrada na origem e percorrida uma vez no sentido positivo.

(d) Determine o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z + 3$, sem calcular os coeficientes desse desenvolvimento. Justifique!