Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – CIVIL

FICHA SUPLEMENTAR 2

LOGARITMOS E INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES COMPLEXAS

Logaritmos

(1) Para cada um dos seguintes conjuntos $Z \subset \mathbb{C}$, esboce o conjunto

$$W = \{w \in \mathbb{C} : e^w \in Z\}$$

dos seus logaritmos.
(a) $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| > e\}$;
(b) $Z = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$;
(c) $Z = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{e} < |z| < e^2,\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi\}$.

Definição de Integral

(2) Calcule pela definição o integral de $f(z) = z - 1$ ao longo da curva de $z = 0$ para $z = 2$ que consiste em:
(a) semicircunferência parametrizada por $z = 1 + e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;
(b) segmento real parametrizado por $z = x$, $0 \leq x \leq 2$.
Explique porque é que as respostas a (a) e (b) têm que ser iguais.

(3) Calcule pela definição o integral de $f(z) = \pi e^{\pi \bar{z}}$ ao longo da fronteira do quadrado com vértices nos pontos $0, 1, 1+i$ e i, percorrida uma vez no sentido positivo.

Fórmulas Integrais e Teorema de Cauchy

(4) Mostre que

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0 \ ,$$

para qualquer inteiro positivo, n, e para qualquer curva fechada simples, γ, envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

Resolução: *Pela fórmula integral de Cauchy,*

$$\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \ ,$$

para qualquer inteiro positivo, n, para qualquer curva fechada simples, γ, envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo, com f uma função analítica numa região simplesmente conexa contendo γ. Quando $f(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, tem-se $f^{(n)}(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, e

Date: 28 de Março de 2000.

obtém-se

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = 0 \ .$$

□

(5) Calcule os seguintes integrais complexos sobre a circunferência de raio 1 centrada na origem e percorrida uma vez no sentido positivo.

(a)

$$\oint \frac{e^z}{z^n}\, dz \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

(b)

$$\oint e^{\frac{1}{z-2}}\, dz \ .$$

(6) Seja γ a circunferência de raio 2 centrada na origem percorrida uma vez no sentido positivo. Calcule os seguintes integrais:

(a)

$$\int_\gamma \cos(e^{\sin z})\, dz \ ;$$

(b)

$$\int_\gamma \frac{e^z}{2z+i}\, dz \ ;$$

(c)

$$\int_\gamma \frac{e^{\sin z}}{(z+5i)^2}\, dz \ ;$$

(d)

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-i)^9}\, dz \ .$$

Resolução:

(a) *A função* $\cos(e^{\sin z})$ *é analítica em* $\mathbb{C}$*. Pelo teorema de Cauchy,*

$$\int_\gamma \cos(e^{\sin z})\, dz = 0 \ .$$

(b) *A função* $\frac{e^z}{2}$ *é analítica em* $\mathbb{C}$*. Pela fórmula integral de Cauchy,*

$$\int_\gamma \frac{\frac{e^z}{2}}{z+\frac{i}{2}}\, dz = 2\pi i \left. \frac{e^z}{2} \right|_{z=-\frac{i}{2}} = \pi i e^{-\frac{i}{2}} \ .$$

(c) *A função* $\frac{e^{\sin z}}{(z+5i)^2}$ *é analítica, por exemplo, num disco de raio 4 centrado na origem o qual contém* γ*. Pelo teorema de Cauchy,*

$$\int_\gamma \frac{e^{\sin z}}{(z+5i)^2}\, dz = 0 \ .$$

(d) *A função* $\cos z$ *é analítica em* $\mathbb{C}$*. Pela fórmula integral de Cauchy,*

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-i)^9}\, dz = \frac{2\pi i}{8!} \left. \frac{d^8}{dz^8}(\cos z) \right|_{z=i} \ .$$

Como $\frac{d^4}{dz^4}\cos z = \cos z$, *tem-se*

$$\frac{d^8}{dz^8}(\cos z)\Big|_{z=i} = \cos i = \frac{e^{-1}+e^1}{2}\ .$$

Logo,

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-i)^9}\,dz = \frac{\pi i}{8!}\left(e+\frac{1}{e}\right)\ .$$

□

(7) Calcule os seguintes integrais complexos sobre a circunferência de raio 2 centrada na origem e percorrida uma vez no sentido positivo.

(a)

$$\oint \frac{e^z}{(z-1)^n}\,dz \qquad \text{para } n = 1,2,3,\ldots$$

(b)

$$\oint \sin\left(\frac{1}{z-\pi}\right)\,dz\ .$$

<u>**Séries de Laurent**</u>

(8) Mostre que o desenvolvimento em série de Laurent

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \ldots$$

é válido para $0 < |z| < +\infty$.

Resolução: *Para qualquer* $z \in \mathbb{C}$, *vale o seguinte desenvolvimento*

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ .$$

Logo, para qualquer $z \neq 0$, *é válido o seguinte desenvolvimento*

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{z} &= \frac{1}{z}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \ldots\ . \end{aligned}$$

Este tem que ser o desenvolvimento em série de Laurent em torno de 0 válido para $0 < |z| < +\infty$, *porque o desenvolvimento de qualquer função analítica em potências (positivas ou negativas) de* $(z - z_0)$ *válido numa determinada coroa circular é único.* □

Comentário: *O termo* válido *significa que o desenvolvimento é convergente e converge para a função em causa.* ♢

(9) Determine os desenvolvimentos em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{z}{z-1}$$

em torno dos seguintes pontos: (a) $z_0 = 0$ e (b) $z_0 = 1$.

Resolução:

(a) *Para* $|z| < 1$, *tem-se*

$$\frac{z}{z-1} = -z \cdot \frac{1}{1-z} = -z \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} -z^k \ ,$$

onde se usou a soma da série geométrica de razão z *com* $|z| < 1$. *Este desenvolvimento vale para qualquer* z *com* $|z| < 1$, *pelo que é necessariamente a série de Taylor em torno de 0, a qual neste caso é também a série de Laurent.*

Para $|z| > 1$, *tem-se*

$$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} \ ,$$

onde se usou a soma da série geométrica de razão $\frac{1}{z}$ *com* $|\frac{1}{z}| < 1$. *Este desenvolvimento vale para qualquer* z *com* $|z| > 1$, *pelo que é a série de Laurent em torno de 0 para a coroa* $1 < |z| < \infty$.

(b) *Para* $z \neq 1$, *tem-se*

$$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1} + 1 \ .$$

Este desenvolvimento vale na coroa $0 < |z-1| < \infty$, *pelo que é necessariamente a série de Laurent em torno de 1 nessa coroa.*

$\square$

Comentário: *Para qualquer função analítica* f, *existe um único desenvolvimento em potências (positivas ou negativas) de* $z - z_0$ *válido em cada coroa circular,* $r_1 < |z - z_0| < r_2$, *contida do domínio de* f. $\diamondsuit$

Singularidades, Resíduos, Etc.

(10) Seja f a função definida por

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-2)} + \sin z \ .$$

(a) Determine o domínio de f, indique os pontos onde a função é analítica e classifique as suas singularidades.

(b) Calcule os resíduos de f nessas singularidades.

(c) Calcule o integral de f ao longo da circunferência de raio 3 centrada na origem percorrida uma vez no sentido positivo.

(d) Determine os valores possíveis para o integral de f sobre curvas fechadas simples contidas no domínio de f.

(e) Determine o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z - i$, *sem* calcular os coeficientes desse desenvolvimento.

Resolução:

(a) *A função* f *está definida e é analítica sempre que o denominador não se anular, ou seja sempre que* $z \neq 0$ *e* $z \neq 2$. *Assim, o domínio de* f *é* $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$.

A singularidade $z = 0$ *é um pólo duplo porque o limite*

$$\lim_{z \to 0} \left[z^2 f(z) \right] = \lim_{z \to 0} \left(\frac{e^z}{z-2} + z^2 \sin z \right) = -\frac{1}{2}$$

existe e não é zero.

A singularidade $z = 2$ é um pólo simples porque o limite

$$\lim_{z\to 2}[(z-2)f(z)] = \lim_{z\to 2}\left(\frac{e^z}{z^2} + (z-2)\sin z\right) = \frac{e^2}{4}$$

existe e não é zero.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_0 f &= \lim_{z\to 0}\tfrac{d}{dz}\left[z^2\left(\tfrac{e^z}{z^2(z-2)} + \sin z\right)\right] \\
&= \lim_{z\to 0}\left(\tfrac{e^z(z-2)-e^z}{(z-2)^2} + 2z\sin z + z^2\cos z\right) = -\tfrac{3}{4}\ . \\
\mathrm{Res}_2 f &= \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\left(\tfrac{e^z}{z^2(z-2)} + \sin z\right)\right] \\
&= \lim_{z\to 2}\left(\tfrac{e^z}{z^2} + (z-2)\sin z\right) = \tfrac{e^2}{4}\ .
\end{aligned}$$

Comentário: *O limite envolvido no cálculo do resíduo só coincide com o limite usado no cálculo para a determinação do tipo de singularidade no caso de pólos simples. Para outras singularidades os limites são diferentes, como se nota aqui no caso de* $z = 0$. ♢

(c) *A circunferência de raio 3 centrada na origem envolve as singularidades 0 e 2. Pelo teorema dos resíduos,*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(\tfrac{e^z}{z^2(z-2)} + \sin z\right) dz &= 2\pi i\,(\mathrm{Res}_0 f + \mathrm{Res}_2 f) \\
&= 2\pi i\left(-\tfrac{3}{4} + \tfrac{e^2}{4}\right) \\
&= \tfrac{e^2-3}{2}\pi i\ .
\end{aligned}$$

(d) *Para efeitos do integral de f, há quatro tipos de curvas fechadas simples contidas no domínio de f e percorridas no sentido* positivo*:*

(i) *curvas que não envolvem qualquer das singularidades,*
(ii) *curvas que envolvem $z = 0$, mas não envolvem $z = 2$,*
(iii) *curvas que envolvem $z = 2$ mas não envolvem $z = 0$, e*
(iv) *curvas que envolvem ambas as singularidades $z = 0$ e $z = 2$.*

Pelo teorema dos resíduos (ou teorema de Cauchy e fórmula integral de Cauchy), os integrais ao longo dessa curvas são:

(i) 0,
(ii) $2\pi i\,\mathrm{Res}_0 f = -\frac{3}{2}\pi i$,
(iii) $2\pi i\,\mathrm{Res}_2 f = \frac{e^2\pi i}{2}$, *e*
(iv) $2\pi i\,(\mathrm{Res}_0 f + \mathrm{Res}_2 f) = \frac{e^2-3}{2}\pi i$.

As curvas dos tipos semelhantes mas percorridas no sentido oposto dão valores simétricos para o integral. Logo, há os seguintes sete valores possíveis para o integral de f sobre curvas fechadas simples contidas no domínio de f:

$$0\ ,\ -\frac{3}{2}\pi i\ ,\ \frac{3}{2}\pi i\ ,\ \frac{e^2\pi i}{2}\ ,\ -\frac{e^2\pi i}{2}\ ,\ \frac{e^2-3}{2}\pi i\ ,\ \frac{3-e^2}{2}\pi i\ .$$

Comentário: *Se as curvas não forem simples, i.e., puderem intersectar-se a si próprias, então o integral pode assumir valores que sejam combinações com coeficientes inteiros dos sete números acima. Por exemplo, sobre uma curva que envolva $z = 2$ com dez voltas no sentido positivo e que não envolva $z = 0$, o integral será igual a* $5e^2\pi i$. ♢

(e) *O teorema da série de Taylor garante que a série de Taylor de f em torno de i converge em qualquer disco centrado em i onde f seja analítica; o maior disco (aberto) nestas*

condições tem raio 1. Logo, o raio de convergência desta série de Taylor é pelo menos 1.
Sobre a circunferência de raio 1 centrada em i existe um ponto singular, $z = 0$, onde o limite de f é infinito, mesmo quando se toma o limite com $|z| < 1$. Como a série de Taylor de f coincide com f no disco $|z| < 1$, conclui-se que a série de Taylor de f diverge em $z = 0$.
Portanto, 1 é o raio do maior disco (aberto) onde a série de Taylor de f em torno de i converge, ou seja, 1 é o raio de convergência da série de Taylor de f em torno de i.
Comentário: *Este tipo de argumento vale quando a(s) singularidade(s) mais próxima(s) do centro da série são pólos ou singularidades essenciais. Se $z = 0$ fosse uma singularidade removível, a série já poderia convergir para raios maiores mesmo que não convergisse para os valores da função. Por exemplo a série de Taylor da função*

$$f(z) = \begin{cases} e^z\ , & |z| < 1 \\ 0\ , & |z| \geq 1 \end{cases}$$

em torno da origem é a série usual da exponencial, tem raio de convergência $+\infty$, mas só coincide com a função para $|z| < 1$. $\diamondsuit$

$\square$

(11) Seja f a função complexa definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{e^z}{z-2}\ .$$

(a) Determine e classifique as singularidades de f.
(b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido na coroa $0 < |z-1| < 1$.
(c) Utilize o teorema dos resíduos para calcular o integral de f ao longo da circunferência de raio 1 centrada em $z = \frac{1}{2}$ percorrida uma vez no sentido positivo.
(d) Determine o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de Taylor em torno de $z_0 = i$, *sem* calcular os coeficientes desse desenvolvimento.

(12) Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy(x+y)$$

(a) Mostre que u é uma função harmónica.
(b) Determine a função v tal que $f = u + iv$ é analítica (uma tal função diz-se uma harmónica conjugada de u) e tal que $v(0,0) = 0$.
(c) Calcule

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-1}\, dz\ ,$$

onde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ e γ é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

(13) Seja f a função complexa definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(2-z)} - \frac{e^{z-1}}{z-1}\ .$$

(a) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido na coroa $0 < |z-1| < 1$.

(b) Utilize o teorema dos resíduos para calcular o integral de f ao longo da circunferência de raio 1 centrada em $z = \frac{1}{2}$ percorrida uma vez no sentido positivo.
(c) Determine o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de Taylor em torno de $z_0 = 2i$, *sem* calcular os coeficientes desse desenvolvimento.

Aplicações ao Cálculo de Integrais Reais

(14) Seja γ_R a curva fechada simples dada pela fronteira do semi-círculo,

$$D_R = \{z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \le \rho \le R \ , \ 0 \le \theta \le \pi\} \ ,$$

de raio $R > 1$, percorrida no sentido positivo.
(a) Calcule o seguinte integral:

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz \ .$$

(b) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz \right| \le \frac{R\pi}{R^2-1} \ ,$$

onde Γ_R é a "sub-curva" de γ_R dada pela semi-circunferência

$$\{z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \le \theta \le \pi\} \ .$$

(c) Prove que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{e} \ .$$

Sugestão: Alíneas (a) e (b).

Resolução:
(a) *A função $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$ tem apenas uma singularidade na região limitada por γ_R: $z = i$ é um pólo simples porque é um zero simples do denominador de f. Pelo teorema dos resíduos,*

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i f = 2\pi i \left. \frac{e^{iz}}{z+i} \right|_{z=i} = \frac{\pi}{e} \ .$$

(b) *Sobre Γ_R é válida a seguinte majoração do módulo de f:*

$$\left| \frac{e^{iz}}{z^2+1} \right| = \frac{|e^{iz}|}{|z^2+1|} \le \frac{1}{R^2-1}$$

porque $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} \le 1$ e $|z^2+1| \ge |z^2| - 1 = R^2 - 1$. O comprimento da semi-circunferência Γ_R é πR. Logo,

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz \right| \le \frac{1}{R^2-1} \pi R = \frac{R\pi}{R^2-1} \ .$$

(c) *O integral da alínea (a) é constante em R, para $R > 1$. No limite,*

$$\begin{aligned} \tfrac{\pi}{e} &= \lim_{R\to+\infty} \textstyle\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz \\ &= \lim_{R\to+\infty} \textstyle\int_{-R}^{+R} \frac{\cos x + i \sin x}{x^2+1}\, dx + \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz \end{aligned}$$

O integral $\int_{-R}^{+R} \frac{\sin x}{x^2+1}\, dx$ *é zero porque a integranda é uma função ímpar. Pela majoração da alínea (b),*

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz \right| \leq \lim_{R\to+\infty} \frac{R\pi}{R^2-1} = 0$$

e, consequentemente,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz = 0\ .$$

Conclui-se que

$$\frac{\pi}{e} = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx\ .$$

□

(15) Seja f a função definida por

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$$

(a) Utilize o teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1} dz$$

onde γ_R é a fronteira do semicírculo

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \mathrm{Im}\ z > 0\}$$

de raio $R > 1$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(b) Mostre que

$$\left| \oint_{\Gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1} dz \right| \leq \frac{\pi R^3}{R^4-1}$$

onde Γ_R é a porção de γ_R correspondente à semicircunferência.

(c) Utilize o resultado das alíneas anteriores para calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$$

(16) Considere a função

$$f(z) = \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1}$$

(a) Use o teorema dos resíduos para calcular o integral

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1} dz$$

onde γ é a circunferência $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(b) Aproveite o resultado da alínea anterior para calcular o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin^2\theta} d\theta$$

Resolução:

(a) *As singularidades da função integranda são os zeros do polinómio* $z^4 - 10z^2 + 1$*:*

$$\begin{aligned} z^4 - 10z^2 + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = \frac{10 \pm \sqrt{100-4}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad z^2 = 5 \pm \sqrt{24} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{24}} \end{aligned}$$

Destes quatro pontos, os que se encontram no interior do contorno de integração são $z = \pm\sqrt{5-\sqrt{24}}$ *e ambos estes pontos são polos simples da função integranda. Temos*

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\sqrt{5-\sqrt{24}}} f(z) &= \lim_{z \to \sqrt{5-\sqrt{24}}} \left(z - \sqrt{5-\sqrt{24}}\right) f(z) \\ &= \lim_{z \to \sqrt{5-\sqrt{24}}} \frac{z}{(z^2 - 5 - \sqrt{24})(z + \sqrt{5+\sqrt{24}})} \\ &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\operatorname{Res}_{z=-\sqrt{5-\sqrt{24}}} f(z) = -\frac{1}{8\sqrt{6}}$$

Portanto, pelo teorema dos resíduos,

$$\oint_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1} dz = -\frac{2\pi i}{4\sqrt{6}} = -\frac{\pi i}{\sqrt{24}}$$

(b) *Temos* $\gamma = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. *Como*

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

concluímos que definindo

$$g(z) = \frac{1}{2 + \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)^2}$$

se tem

$$g(e^{i\theta}) = \frac{1}{2 + \sin^2\theta}$$

O integral de g *sobre a circunferência não é ainda o integral que queremos calcular porque ao substituir na definição de integral, se obtém*

$$\oint_\gamma g(z)dz = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta$$

Mas para eliminar o termo $ie^{i\theta}$ *basta dividir* $g(z)$ *por* iz*. Assim, concluímos que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin^2\theta} = \oint_\gamma \frac{1}{2 + \left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)^2} \frac{dz}{iz}$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{1}{iz\left(2+\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)^2\right)} &= \frac{1}{iz(2-\frac{1}{4}(z^2-2+\frac{1}{z^2}))}\\ &= -\frac{4z}{i(z^4-10z^2+1)}\end{aligned}$$

da alínea anterior concluímos que

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin^2\theta}=\frac{4}{i}\frac{\pi i}{\sqrt{24}}=\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

□

(17) (a) Determine e classifique todas as singularidades de

$$f(z)=\frac{z^4+1}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}\ .$$

(b) Utilize o teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_\gamma \frac{z^4+1}{z^2\left(2z^2+5z+2\right)}\,dz\ ,$$

onde γ é a curva $\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ percorrida no sentido positivo.

(c) Aproveite o resultado da alínea anterior para calcular

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)}{5+4\cos(\theta)}d\theta\ .$$