Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – CIVIL

FICHA 3 – TEOREMA DOS RESÍDUOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

para entregar na aula teórica de **6ª feira, 28 de Abril**

(1) Seja f a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

(a) Determine e classifique as singularidades de f.

(b) Utilize o teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+1} dz$$

onde γ_R é a fronteira do semicírculo

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R,\ \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$$

de raio $R > 1$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(c) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1} dz \right| \leq \frac{R\pi}{R^4 - 1}$$

onde Γ_R é a porção de γ_R correspondente à semicircunferência

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = R,\ \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$$

(d) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx$$

(2) (a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent na região $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da função

$$g(z) = (z - z^3)e^{\frac{1}{z}}$$

(b) Calcule o resíduo no ponto $z = 0$ da função

$$f(z) = \frac{1}{z-4} + (z - z^3)e^{\frac{1}{z}}$$

(c) Calcule

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{1}{z-4} + (z - z^3)e^{\frac{1}{z}} \right) dz$$

onde γ é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 5\}$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(d) Quais são os possíveis valores do integral

$$\oint_{C} \left(\frac{1}{z-4} + (z - z^3)e^{\frac{1}{z}} \right) dz$$

onde C é uma curva fechada simples contida em $\mathbb{C} \setminus \{0, 4\}$?

...continua...

Date: 5 de Abril de 2000.

Nos exercícios seguintes indique o intervalo de definição das soluções e inclua uma verificação das soluções que apresenta.

(3) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:
  (a) $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2+1}$

  (b) $\frac{dy}{dt} = t\sin t + \frac{1}{t^2-1}$

(4) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:
  (a) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y = 0$

  (b) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t-3}y = \sin t$

(5) Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial:
  (a) $\frac{dy}{dt} + ty = t \quad , \quad y(0) = 1$

  (b) $\frac{dy}{dt} + y = \cosh t \quad , \quad y(0) = 1$

(6) Em $t = 0$ vivem 100 coelhos numa floresta. Sabendo que a taxa de natalidade dos coelhos é de 2 por cento por dia, e que todos os dias 1 coelho é esmagado pela queda de uma árvore, indique a população de coelhos (aproximada) ao fim de dez semanas (isto é para $t = 70$).