

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – CIVIL

FICHA 3 – TEOREMA DOS RESÍDUOS
 E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

RESOLUÇÃO

(1) Seja f a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1} .$$

- (a) Determine e classifique as singularidades de f .
 (b) Utilize o teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz ,$$

onde γ_R é a fronteira do semicírculo

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq 0\} ,$$

de raio $R > 1$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(c) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz \right| \leq \frac{R\pi}{R^4 - 1} ,$$

onde Γ_R é a porção de γ_R correspondente à semicircunferência

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\} .$$

(d) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx .$$

Resolução:

(a) As singularidades de f são os zeros de $z^4 + 1$:

$$\begin{aligned} z^4 + 1 = 0 &\iff z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{i\pi}} \\ &\iff z = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} , \quad k = 0, 1, 2, 3 \\ &\iff z = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad z = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\quad \text{ou} \quad z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad z = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} . \end{aligned}$$

Cada uma destas quatro singularidades é um pólo simples porque o seguinte limite existe e é não nulo ($k = 0, 1, 2, 3$):

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}} \left[(z - e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}) \frac{1}{z^4 + 1} \right] = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-3i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

onde na primeira igualdade se empregou a regra de Cauchy para resolver a indeterminação $\left(\frac{0}{0}\right)$.

- (b) Pelo teorema dos resíduos, o integral pedido é igual a $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos nas singularidades de f situadas na região limitada pelo caminho. Os pólos

$$z_1 \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

são as únicas singularidades de f na região limitada pelo caminho γ_R . Usa-se a fórmula para o cálculo de resíduos em pólos simples e a regra de Cauchy para resolver a indeterminação:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z_1} f &= \lim_{z \rightarrow z_1} \left[(z - z_1) \frac{1}{z^4 + 1} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_1^3} \\ &= \frac{1}{4} e^{i\frac{-3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z_2} f &= \lim_{z \rightarrow z_2} \left[(z - z_2) \frac{1}{z^4 + 1} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_2^3} \\ &= \frac{1}{4} e^{i\frac{-9\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8} . \end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz = 2\pi i (\text{Res}_{z_1} f + \text{Res}_{z_2} f) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi .$$

- (c) Tem-se a estimativa

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} |f(z)| ds \leq M_R \cdot L_R ,$$

onde M_R é um majorante do módulo da função integranda $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ sobre o caminho Γ_R e $L_R = \pi R$ é o comprimento do caminho Γ_R (i.e., o comprimento de uma semicircunferência de raio R). Para majorar $\frac{1}{|z^4+1|}$, minora-se o denominador. Pela desigualdade triangular, tem-se que

$$|z^4 + 1| \geq |z^4| - 1 .$$

Sobre Γ_R , tem-se $|z| = R$. Logo, como $R > 1$, tem-se

$$\left| \frac{1}{z^4 + 1} \right| = \frac{1}{|z^4 + 1|} \leq \frac{1}{R^4 - 1} .$$

Tomando $M_R = \frac{1}{R^4 - 1}$, fica

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^4 - 1} \quad \text{para } R > 1 .$$

- (d) Os integrais de f sobre γ_R e sobre Γ_R estão relacionados por:

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^4 + 1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz ,$$

onde o integral em dx representa um integral sobre um segmento do eixo real em \mathbb{C} . Pela alínea (b), o termo da esquerda é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2} \pi$ para qualquer $R > 1$. Pela

alínea (c), o segundo termo da direita tende para zero quando R tende para infinito. Portanto, fazendo $R \rightarrow +\infty$, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi .$$

□

(2) (a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent na região $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da função

$$g(z) = (z - z^3) e^{\frac{1}{z}} .$$

(b) Calcule o resíduo no ponto $z = 0$ da função

$$f(z) = \frac{1}{z - 4} + (z - z^3) e^{\frac{1}{z}} .$$

(c) Calcule

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{1}{z - 4} + (z - z^3) e^{\frac{1}{z}} \right) dz ,$$

onde γ é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(d) Quais são os possíveis valores do integral

$$\oint_C \left(\frac{1}{z - 4} + (z - z^3) e^{\frac{1}{z}} \right) dz ,$$

onde C é uma curva fechada simples contida em $\mathbb{C} \setminus \{0, 4\}$?

Resolução:

(a) A partir da série de Taylor da exponencial, deduz-se que o seguinte desenvolvimento é válido em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} .$$

Logo, em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tem-se

$$\begin{aligned} (z - z^3) e^{\frac{1}{z}} &= (z - z^3) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^{k-1}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^{k-3}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+1} \frac{1}{(1-k)!} z^k - \sum_{k=-\infty}^{+3} \frac{1}{(3-k)!} z^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+3} a_k z^k , \end{aligned}$$

onde

$$a_k = \begin{cases} -1 & \text{se } k = 2 \text{ ou } 3 \\ \frac{1}{(1-k)!} - \frac{1}{(3-k)!} & \text{se } k \leq 1 . \end{cases}$$

Pela unicidade do desenvolvimento de uma função analítica numa coroa circular em série de potências positivas ou negativas (cf. teorema da série de Laurent), conclui-se

que o desenvolvimento em série de Laurent na região $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da função $g(z)$ é

$$\sum_{k=-\infty}^{+1} \frac{1}{(1-k)!} z^k - \sum_{k=-\infty}^{+3} \frac{1}{(3-k)!} z^k = \sum_{k=-\infty}^{+3} a_k z^k,$$

onde os coeficientes a_k estão definidos acima.

- (b) O resíduo de $f(z)$ no ponto $z = 0$ é o coeficiente a_{-1} da potência $\frac{1}{z}$ no desenvolvimento de $f(z)$ em série de Laurent em potências de z válido num disco furado, $0 < |z| < r$, onde $f(z)$ é analítica.¹ Como a série de Laurent da soma $\frac{1}{z-4} + (z-z^3)e^{\frac{1}{z}}$ é a soma das séries de Laurent de $\frac{1}{z-4}$ e de $(z-z^3)e^{\frac{1}{z}}$, tem-se que

$$\text{Res}_0 \left(\frac{1}{z-4} + (z-z^3)e^{\frac{1}{z}} \right) = \text{Res}_0 \frac{1}{z-4} + \text{Res}_0 \left((z-z^3)e^{\frac{1}{z}} \right).$$

Uma vez que $\frac{1}{z-4}$ é analítica em $z = 0$, a série de Laurent de $\frac{1}{z-4}$ em torno de $z = 0$ é uma série de Taylor, pelo que só tem potências positivas e consequentemente

$$\text{Res}_0 \frac{1}{z-4} = 0.$$

O resíduo de $g(z) = (z-z^3)e^{\frac{1}{z}}$ no ponto $z = 0$ é o coeficiente da potência $\frac{1}{z}$ no desenvolvimento de $g(z)$ válido em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, o qual foi calculado na alínea (a). Conclui-se que

$$\begin{aligned} \text{Res}_0 f &= \text{Res}_0 \left((z-z^3)e^{\frac{1}{z}} \right) \\ &= \frac{1}{(1-(-1))!} - \frac{1}{(3-(-1))!} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \\ &= \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

- (c) O caminho γ é fechado simples, orientado positivamente e envolve apenas uma singularidade da função integranda $f(z)$, nomeadamente o ponto $z = 0$. Pelo teorema dos resíduos, o integral pedido é

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{1}{z-4} + (z-z^3)e^{\frac{1}{z}} \right) dz = 2\pi i \text{Res}_0 f = \pi i \frac{11}{12}.$$

- (d) Pelo teorema dos resíduos, cada integral

$$\oint_C \left(\frac{1}{z-4} + (z-z^3)e^{\frac{1}{z}} \right) dz$$

é $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos nas singularidades envolvidas pelo caminho C , se o caminho for percorrido no sentido positivo, e é $-2\pi i$ vezes a soma dos resíduos nas singularidades envolvidas pelo caminho C , se o caminho for percorrido no sentido negativo.

A função integranda $f(z)$ tem apenas duas singularidades, $z = 0$ e $z = 4$. O ponto $z = 4$ um pólo simples de $f(z)$ porque o limite

$$\lim_{z \rightarrow 4} \left[(z-4) \left(\frac{1}{z-4} + (z-z^3)e^{\frac{1}{z}} \right) \right] = 1.$$

existe e não é nulo. O resíduo de $f(z)$ em $z = 4$, é

$$\text{Res}_4 f = \lim_{z \rightarrow 4} \left[(z-4) \left(\frac{1}{z-4} + (z-z^3)e^{\frac{1}{z}} \right) \right] = 1.$$

¹Pode tomar-se $r \in]0, 4[$ porque 4 é a distância de $z = 0$ à singularidade mais próxima $z = 4$.

Conclui-se que os possíveis valores do integral indicado são:

- $\frac{11}{24}$, se C envolver apenas a singularidade $z = 0$ no sentido positivo,
- $-\frac{11}{24}$, se C envolver apenas a singularidade $z = 0$ no sentido negativo,
- 1 , se C envolver apenas a singularidade $z = 4$ no sentido positivo,
- -1 , se C envolver apenas a singularidade $z = 4$ no sentido negativo,
- $\frac{35}{24}$, se C envolver ambas as singularidades $z = 0$ e $z = 4$ no sentido positivo,
- $-\frac{35}{24}$, se C envolver ambas as singularidades $z = 0$ e $z = 4$ no sentido negativo, ou
- 0 , se C não envolver nenhuma das singularidades.

□

Comentário: Tratando-se C de um caminho simples (i.e., que não se auto-intersecta), não é possível que dê mais do que uma volta a cada singularidade. ◇

*Nas respostas aos exercícios seguintes,
indique o intervalo de definição das soluções que apresenta
e inclua uma verificação dessas soluções.*

(3) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2+1}$;

(b) $\frac{dy}{dt} = t \sin t + \frac{1}{t^2-1}$.

Resolução:

(a) Resolve-se por primitivação:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{t}{t^2+1} \\ \Leftrightarrow y(t) &= \int \frac{t}{t^2+1} dt + c \\ \Leftrightarrow y(t) &= \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + c = \ln \sqrt{t^2+1} + c, \end{aligned}$$

onde c representa uma constante real arbitrária.

Solução geral:

$$y(t) = \ln \sqrt{t^2+1} + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

Intervalo de definição: \mathbb{R} .

Verificação:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln \sqrt{t^2+1} + c) = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{t^2+1} \quad - \text{ ok!}$$

(b) A função $\frac{1}{t^2-1}$ está definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Em qualquer intervalo contido em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, a equação dada resolve-se por primitivação:

$$\frac{dy}{dt} = t \sin t + \frac{1}{t^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \int t \sin t dt + \int \frac{1}{t^2-1} dt + c,$$

onde c representa uma constante real arbitrária. Uma primitiva de $t \sin t$ encontra-se primitivando por partes²:

$$\int t \sin t \, dt = -t \cos t - \int (-\cos t) \, dt = \sin t - t \cos t .$$

Recorrendo a decomposição em fracções simples,

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) ,$$

determina-se uma primitiva de $\frac{1}{t^2-1}$:

$$\frac{1}{2} (\ln |t-1| - \ln |t+1|) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| .$$

Conclui-se que, para $t \in]-\infty, -1[$, $t \in]-1, 1[$ ou $t \in]1, +\infty[$,

$$\frac{dy}{dt} = t \sin t + \frac{1}{t^2 - 1} \iff y(t) = \sin t - t \cos t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c ,$$

onde c representa uma constante real arbitrária.

Solução geral:

$$y(t) = \sin t - t \cos t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c , \quad \text{com } c \in \mathbb{R} .$$

Intervalo de definição: $] -\infty, -1[$ ou $] -1, 1[$ ou $]1, \infty[$.

Verificação:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sin t - t \cos t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c \right) \\ &= \cos t - \cos t + t \sin t + \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt} \frac{t-1}{t+1}}{\frac{t-1}{t+1}} \\ &= t \sin t + \frac{1}{2} \frac{\frac{t+1-t+1}{(t+1)^2}}{\frac{t-1}{t+1}} \\ &= t \sin t + \frac{1}{(t-1)(t+1)} \quad - \text{ok!} \end{aligned}$$

□

Comentário: A equação dada em (b) tem três famílias infinitas de soluções, cada família parametrizada por $c \in \mathbb{R}$. As três famílias correspondem aos três possíveis intervalos de definição: $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ e $]1, \infty[$. ◇

(4) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y = 0$;

(b) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t-3}y = \sin t$.

²Recordar que $\int uv' = uv - \int u'v$, devido à regra de derivação para um produto.

Resolução:

(a) Esta equação só faz sentido para $t \neq 0$.

Na vizinhança de um instante onde $y \neq 0$, a equação dada pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y &= 0 \iff \frac{\dot{y}}{y} = -\frac{1}{t^2} \\ &\iff \int \frac{\dot{y}}{y} dt = -\int \frac{1}{t^2} dt + c, \quad \text{onde } c \in \mathbb{R} \\ &\iff \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{t} + c \\ &\iff \ln |y| = \frac{1}{t} + c \\ &\iff |y(t)| = e^c e^{\frac{1}{t}} \\ &\iff y(t) = ke^{\frac{1}{t}}, \quad \text{onde } k \neq 0. \end{aligned}$$

Nota-se que, se uma solução $y(t)$ não se anula num instante t_0 , então $y(t)$ também não se anula em qualquer outro instante t onde esteja definida – reparar na expressão de $y(t)$ como produto de uma constante não nula pela exponencial que nunca se anula. Deduz-se que, se uma solução $y(t)$ se anula num instante t_0 , então $y(t)$ terá que ser a função identicamente nula, a qual é de facto solução como se pode verificar substituindo na equação. A solução identicamente nula pode ser escrita na forma $ke^{\frac{1}{t}}$ escolhendo $k = 0$.

Solução geral:

$$y(t) = ke^{\frac{1}{t}} \quad \text{com } k \in \mathbb{R}.$$

Intervalo de definição: $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

Verificação:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} ke^{\frac{1}{t}} = -k \frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} \\ \frac{1}{t^2} y &= \frac{1}{t^2} ke^{\frac{1}{t}} \\ \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2} y &= 0 \quad - \text{ok!} \end{aligned}$$

Comentário: Esta equação é linear homogénea. Podia ter sido resolvida aplicando a fórmula geral para a solução dessas equações. \diamond

(b) Esta equação é linear. Aplicando a fórmula geral para a solução de equações deste tipo, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t-3}y &= \sin t \\ \iff y(t) &= e^{-\int \frac{1}{t-3} dt} \left(k + \int e^{\int \frac{1}{t-3} dt} \sin t dt \right), \quad \text{onde } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se se escolher $\int \frac{1}{t-3} dt = \ln |t-3|$, fica

$$e^{-\int \frac{1}{t-3} dt} = \frac{1}{|t-3|}$$

e

$$\begin{aligned} \int e^{\int \frac{1}{t-3} dt} \sin t dt &= \int |t-3| \sin t dt \\ &= \frac{|t-3|}{t-3} \sin t - |t-3| \cos t, \end{aligned}$$

onde se primitivou por partes, para os casos $t - 3 > 0$ e $t - 3 < 0$.

Solução geral:

$$y(t) = \frac{c + \sin t}{t - 3} - \cos t \quad \text{com } c \in \mathbb{R} .$$

Intervalo de definição: $] -\infty, 3[$ ou $]3, +\infty[$.

Verificação:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{c + \sin t}{t - 3} - \cos t \right) \\ &= \frac{(t - 3) \cos t - c - \sin t}{(t - 3)^2} + \sin t \\ \frac{1}{t - 3} y &= \frac{1}{t - 3} \left(\frac{c + \sin t}{t - 3} - \cos t \right) \\ &= \frac{c + \sin t - (t - 3) \cos t}{(t - 3)^2} \\ \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t - 3} y &= \sin t \quad - \text{ok!} \end{aligned}$$

Comentário: Em alternativa, para $t \neq 3$ poder-se-ia ter multiplicado a equação por $t - 3$ e primitivado:

$$\begin{aligned} (t - 3) \frac{dy}{dt} + y &= (t - 3) \sin t \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [(t - 3)y(t)] &= (t - 3) \sin t \\ \Leftrightarrow (t - 3)y(t) &= \int [(t - 3) \sin t] dt + c \\ \Leftrightarrow y(t) &= \frac{1}{t - 3} [\sin t - (t - 3) \cos t + c] \\ \Leftrightarrow y(t) &= \frac{\sin t}{t - 3} - \cos t + \frac{c}{t - 3} . \end{aligned}$$

◇

□

(5) Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\frac{dy}{dt} + ty = t$, $y(0) = 1$;

(b) $\frac{dy}{dt} + y = \cosh t$, $y(0) = 1$.

Resolução:

(a) A EDO deste problema de valor inicial é uma equação linear. A solução será uma função dada, por exemplo, pela fórmula para a solução do PVI para equações lineares; em particular, essa solução é única. Ora observa-se que a função identicamente igual a 1 é solução deste PVI. Logo, essa é a solução.

Solução: $y(t) = 1$.

Intervalo de definição: \mathbb{R} .

Verificação: A condição inicial é satisfeita

$$y(0) = 1$$

e a equação diferencial também:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 0 \\ ty(t) &= t \\ \frac{dy}{dt} + ty(t) &= t \quad - \text{ok!}\end{aligned}$$

Comentário: Se não se tivesse reparado logo que a função constante igual a 1 resolvia o problema dado, a mesma solução seria encontrada por qualquer dos métodos que se podem aplicar a equações lineares. \diamond

(b) A EDO deste problema de valor inicial é linear. Aplicando a fórmula para a solução de um problema de valor inicial envolvendo uma equação linear, obtém-se a seguinte expressão para a solução:

$$\begin{aligned}y(t) &= e^{-\int_0^t 1 ds} \left(1 + \int_0^t e^{\int_0^s 1 du} \cosh s ds \right) \\ &= e^{-t} \left(1 + \int_0^t e^s \cdot \frac{e^s + e^{-s}}{2} ds \right) \\ &= e^{-t} \left(1 + \int_0^t \frac{e^{2s} + 1}{2} ds \right) \\ &= e^{-t} \left(1 + \frac{e^{2t} - 1}{4} + \frac{t}{2} \right) \\ &= e^{-t} + \frac{e^t - e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2} \\ &= \frac{e^t}{4} + \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2}.\end{aligned}$$

Solução: $y(t) = \frac{e^t}{4} + \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2}$.

Intervalo de definição: \mathbb{R} .

Verificação: A condição inicial é satisfeita

$$y(0) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 1$$

e a equação diferencial também:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{e^t}{4} - \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{te^{-t}}{2} \\ y(t) &= \frac{e^t}{4} + \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2} \\ \frac{dy}{dt} + y(t) &= \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} \\ &= \cosh t \quad - \text{ok!}\end{aligned}$$

Comentário: Equivalentemente, poder-se-ia ter primeiro resolvido a EDO pelo método do factor de integração ou por aplicação da fórmula geral para a solução da equação linear, e depois fixado a constante de integração de maneira a satisfazer a condição inicial. \diamond

\square

- (6) Em $t = 0$ vivem 100 coelhos numa floresta. Sabendo que a taxa de natalidade dos coelhos é de 2 por cento por dia, e que, em média, 1 coelho é esmagado pela queda de uma árvore por dia, indique a população aproximada de coelhos ao fim de dez semanas, isto é, para $t = 70$.

Resolução: Seja $y(t)$ uma aproximação diferenciável do número de coelhos no dia t para $t \geq 0$. Se não houvesse mortes, a população de coelhos cresceria exponencialmente de acordo com a lei $\frac{dy}{dt} = 0.02y(t)$. Como também morre 1 coelho por dia, a equação diferencial que serve de modelo para a evolução da população de coelhos é

$$\frac{dy}{dt} = 0.02y(t) - 1$$

para $t \geq 0$. Como no dia inicial vivem 100 coelhos, tem-se $y(0) = 100$. Assim, vai-se primeiro procurar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 0.02y(t) - 1 \\ y(0) = 100 . \end{cases}$$

A equação diferencial envolvida neste problema de valor inicial é linear. Multiplicando-a pelo factor de integração $e^{-0.02t}$, obtém-se

$$\begin{aligned} e^{-0.02t} \frac{dy}{dt} - 0.02e^{-0.02t} y(t) &= -e^{-0.02t} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (e^{-0.02t} y(t)) &= -e^{-0.02t} \\ \Leftrightarrow e^{-0.02t} y(t) &= - \int e^{-0.02t} dt + c, \quad \text{onde } c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow y(t) &= e^{0.02t} (c + 50e^{-0.02t}) \\ \Leftrightarrow y(t) &= ce^{0.02t} + 50 . \end{aligned}$$

A condição inicial impõe que

$$100 = ce^0 + 50 \implies c = 50 .$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 50e^{0.02t} + 50 .$$

Para $t = 70$, tem-se

$$y(70) = 50e^{1.4} + 50 \simeq 252.78 .$$

Conclui-se que, ao fim de dez semanas, a população aproximada de coelhos é 253.

Verificação do PVI: A condição inicial é satisfeita

$$y(0) = 50 + 50 = 100$$

e a equação diferencial também:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= e^{0.02t} \\ 0.02y - 1 &= e^{0.02t} + 1 - 1 = e^{0.02t} = \frac{dy}{dt} \quad - \text{ok!} \end{aligned}$$

□