

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – CIVIL
 FICHA SUPLEMENTAR 4
 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Formas canónicas de Jordan

Para cada uma das matrizes A seguintes, determine uma forma canónica de Jordan J , e uma matriz de mudança de base S tal que $A = SJS^{-1}$.

(1) (a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) A matriz A é um bloco de Jordan, portanto $J = A$ e

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Os valores próprios da matriz são as soluções de

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (1 - \lambda)^2 + 4 = 0 \iff \lambda = 1 \pm 2i.$$

Conclui-se que uma forma canónica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} 1 + 2i & 0 \\ 0 & 1 - 2i \end{bmatrix}.$$

Os vectores próprios associados a $1 + 2i$ são os vectores $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ que verificam

$$\begin{bmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -ia = b.$$

Uma base do espaço próprio de $1 + 2i$ é constituída pelo vector

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Os vectores próprios associados a $1 - 2i$ são os vectores $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ que verificam

$$\begin{bmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff ia = b.$$

Uma base do espaço próprio de $1 - 2i$ é constituída pelo vector

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Portanto uma matriz de mudança de base que põe A em forma canónica é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

(c) Os valores próprios da matriz são as soluções da equação

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Logo A tem apenas um valor próprio, $\lambda = 2$. Uma vez que a matriz não é igual a $2I$ (onde I é a matriz identidade), o espaço próprio tem necessariamente dimensão 1 e portanto a forma canónica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Os vectores próprios de A são os que verificam $(A - 2I)v = 0$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = -a.$$

Uma base dos vectores próprios é formada, por exemplo, pelo vector

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Um vector próprio generalizado é um vector w que satisfaz $(A - 2I)w = v$. Podemos tomar, por exemplo,

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se que uma matriz de mudança de base que põe A em forma canónica é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Os valores próprios da matriz são as soluções da equação

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \iff \\ -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + (1-\lambda) &= 0 \iff \\ (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda) + 1) &= 0 \iff \\ (1-\lambda)(1-\lambda)^2 &= 0 \iff \\ (1-\lambda)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Logo A tem apenas um valor próprio, $\lambda = 1$. Os vectores próprios são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff c = b - a.$$

Uma base do espaço próprio é constituída pelos vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que se obtiveram fazendo $a = 1, b = 1$ e $a = -1, b = 0$, respectivamente. Conclui-se que uma forma canónica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Falta achar um vector próprio generalizado correspondente à terceira coluna de J . Esse vector será uma solução de

$$(A - I)w = v$$

onde v é um vector próprio correspondente ao valor próprio 1 que gera o espaço das colunas da matriz $(A - I)$. Uma vez que

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

o espaço das colunas é gerado por $v_1 + v_2$. Assim, procura-se uma solução de

$$(A - I)w = v_1 + v_2.$$

Toma-se, por exemplo,

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma matriz de mudança de base que põe A em forma canónica é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

onde a primeira coluna é o vector próprio v_1 , a segunda coluna é o vector próprio $v_1 + v_2$ e a terceira coluna é o vector próprio generalizado w associado a $v_1 + v_2$. \square

Para cada uma das matrizes A seguintes, determine uma forma canónica de Jordan J , e uma matriz de mudança de base S tal que $A = SJS^{-1}$.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(2)

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(e)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(f)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Exponencial de Matrizes

Para cada uma das matrizes A seguintes, determine e^{At} .

(3) (a) $A = \begin{bmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) A exponencial de uma matriz diagonal, At , é a matriz diagonal cujas entradas são as usuais exponenciais escalares das entradas correspondentes em At . Deste modo,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-\pi t} & 0 \\ 0 & e^{2\pi t} \end{bmatrix}.$$

(b) Os valores próprios de A são dados por

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)^2 - 1 = 0 &\iff \lambda^2 - 2\lambda = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 2. \end{aligned}$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio 0 são dados por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -a = b.$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio 2 são dados por

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1+e^{2t}}{2} & \frac{-1+e^{2t}}{2} \\ \frac{-1+e^{2t}}{2} & \frac{1+e^{2t}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) A matriz A tem apenas um valor próprio, $\lambda = 1$, o qual tem um espaço próprio de dimensão 1. Um vector próprio é uma solução de $(A - I)v = 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$

Por exemplo pode-se tomar

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Um vector próprio generalizado w , obtém-se resolvendo a equação $(A - I)w = v$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w = v$$

Por exemplo, pode-se tomar

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

Relativamente, à base (v, w) , a transformação linear representada por A é dada por um bloco de Jordan, J , para o valor próprio 1, ou seja,

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Logo, a exponencial é

$$e^{At} = S \underbrace{\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} S^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Comentário: Notando que $\frac{1}{2}A$ é um bloco de Jordan para o valor próprio $\frac{1}{2}$, podia-se, em alternativa, calcular

$$e^{\frac{1}{2}At} = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & te^{\frac{1}{2}t} \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$$

e avaliar em $2t$.

◇

(d) Os valores próprios de A são dados por

$$\begin{aligned} (4 - \lambda)(-2 - \lambda) + 10 = 0 & \iff \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \\ & \iff \lambda = 1 \pm i. \end{aligned}$$

Os vectores próprios (complexos) associados ao valor próprio $\lambda = 1 + i$ são dados por

$$\begin{bmatrix} 3 - i & 5 \\ -2 & -3 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = \frac{i - 3}{5}a.$$

Os vectores próprios para o valor próprio $1 - i$ são dados por

$$\begin{bmatrix} 3 + i & 5 \\ -2 & -3 + i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = \frac{-3 - i}{5}a.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{i-3}{5} & \frac{-3-i}{5} \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1-3i}{2} & \frac{-5i}{2} \\ \frac{1+3i}{2} & \frac{5i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= e^t \begin{bmatrix} \frac{(e^{it}+e^{-it})-3i(e^{it}-e^{-it})}{2} & \frac{-5i(e^{it}-e^{-it})}{2} \\ i(e^{it}-e^{-it}) & \frac{(e^{it}+e^{-it})+3i(e^{it}-e^{-it})}{2} \end{bmatrix} \\ &= e^t \begin{bmatrix} \cos t + 3 \sin t & 5 \sin t \\ -2 \sin t & \cos t - 3 \sin t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comentário: Se λ é valor próprio complexo da matriz real A com o vector próprio v , então o seu complexo conjugado também é valor próprio de A e o vector complexo conjugado de v é um vector próprio correspondente: $Av = \lambda v \implies \overline{Av} = \overline{\lambda v} \implies A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Esta observação permite simplificar cálculos. \diamond

(e) A matriz é um bloco de Jordan 3 por 3.

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{5t} & te^{5t} & \frac{t^2}{2}e^{5t} \\ 0 & e^{5t} & te^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}.$$

□

Sistemas de Equações Lineares

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (4) (a) Quais são os valores próprios de A ?
 (b) Quais são os vectores próprios de A ?
 (c) Determine uma matriz de mudança de base, S , que diagonaliza A , e determine a sua inversa, S^{-1} .
 (d) Calcule e^{At} .
 (e) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

(f) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

(g) Escreva duas funções $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior.

Resolução:

(a) Os valores próprios são os zeros do polinómio característico:

$$p(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 4.$$

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 3.$$

Os valores próprios de A são -1 e 3 .

(b) Um vector v é vector próprio de A associado ao valor próprio λ se e só se $Av = \lambda v$, ou seja, se e só se $(A - \lambda I)v = 0$. Em componentes, escreve-se $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Equação para os vectores próprios associados ao valor próprio -1 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -a = b.$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -1$ são

$$v = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Equação para os vectores próprios associados ao valor próprio 3:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b .$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 3$ são

$$v = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a \in \mathbb{R} .$$

- (c) Mudando para uma base de vectores próprios de A , a transformação linear fica diagonal. Tome-se, por exemplo, a matriz de mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas colunas são vectores próprios de A associados aos valores próprios -1 e 3 . A mudança inversa é

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Então tem-se

$$A = S \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} S^{-1} .$$

- (d) De acordo com a alínea anterior,

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} \\ \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} \end{bmatrix} .$$

- (e) A solução do problema de valor inicial dado é

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} \\ \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e^{-t} + 6e^{3t} \\ e^{-t} + 6e^{3t} \end{bmatrix} , \quad \forall t \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

- (f) A solução geral da equação diferencial dada é

$$\begin{aligned} y(t) &= S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \end{bmatrix} , \quad \forall t \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- (g) Compõe-se uma base para o espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior com as colunas da matriz

$$S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} ,$$

ou seja, com as funções $x_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} .$$

De facto, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções linearmente independentes e qualquer solução $y(t)$ da equação da alínea anterior é da forma $y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ para algum $c_1 \in \mathbb{R}$ e algum $c_2 \in \mathbb{R}$.

□

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (5) (a) Calcule e^{At} .
 (b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial
- $$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
- (c) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial
- $$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 + y_2 + e^{2t} \\ \dot{y}_2 = -y_1 + y_2 \end{cases}.$$

Resolução:

(a) Os valores próprios de A são dados por

$$\begin{aligned} (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = 0 &\iff \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \\ &\iff \lambda = 2. \end{aligned}$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio 2 são dados por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -a = b.$$

Como quaisquer dois vectores próprios são linearmente dependentes, escolhe-se um vector próprio, por exemplo,

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

e procura-se um vector próprio generalizado, w :

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)w = v &\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &\iff a + b = 1. \end{aligned}$$

Por exemplo,

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é vector próprio generalizado. Portanto,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) A solução do problema de valor inicial é dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}y(0) \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Esta equação diferencial pode ser escrita matricialmente na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + b(t) \quad \text{onde} \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A sua solução geral é dada pela fórmula de variação das constantes:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}c + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s) ds \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \int_0^t \begin{bmatrix} (1+t-s)e^{2(t-s)} & (t-s)e^{2(t-s)} \\ -(t-s)e^{2(t-s)} & (1-t+s)e^{2(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} c_1(1+t) + c_2t \\ -c_1t + c_2(1-t) \end{bmatrix} + e^{2t} \int_0^t \begin{bmatrix} 1+t-s \\ -t+s \end{bmatrix} ds \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} c_1(1+t) + c_2t + t + \frac{t^2}{2} \\ -c_1t + c_2(1-t) - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

□

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (6) (a) Calcule e^{At} .
(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{4t} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

- (7) (a) Calcule e^{At} .
(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Considere a equação diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & & & \\ -2 & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \quad (*)$$

onde as entradas omitidas na matriz são zeros.

- (8) (a) Determine a solução de (*) com condição inicial
- $$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = y_4(0) = -y_5(0) = 1.$$
- (b) Determine a solução de (*) com condição inicial
- $$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0.$$
- (c) Determine o conjunto de todas as condições iniciais, $y_0 \in \mathbb{R}^5$, tais que as correspondentes soluções do problema de valor inicial

$$\begin{cases} (*) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

são limitadas.

Resolução: Seja A a matriz dos coeficientes. A solução de um problema de valor inicial equação (*) com $y(t_0) = y_0$

é

$$y(t) = e^{At}y_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para calcular a exponencial da matriz At aproveitam-se os cálculos do exercício 3 alíneas (b) e (d):

Se $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, então

$$e^{A_1 t} = e^t \begin{bmatrix} \cos t + 3 \sin t & 5 \sin t \\ -2 \sin t & \cos t - 3 \sin t \end{bmatrix}.$$

Se $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então

$$e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}+1}{2} & \frac{e^{2t}-1}{2} \\ \frac{e^{2t}-1}{2} & \frac{e^{2t}+1}{2} \end{bmatrix}.$$

Como

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & -2 & \\ & & A_2 \end{bmatrix},$$

tem-se que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{A_2 t} \end{bmatrix}.$$

(a) A solução de (*) com condição inicial

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = y_4(0) = -y_5(0) = 1$$

é

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

(b) A solução de (*) com condição inicial

$$y_1(0) = 1 , \quad y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0$$

é

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t + 3 \sin t \\ -2 \sin t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(c) A solução de um problema de valor inicial

$$\text{equação (*)} \quad \text{com} \quad y(0) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

é

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos t + 3e^t \sin t & 5e^t \sin t \\ -2e^t \sin t & e^t \cos t - 3e^t \sin t \\ & e^{-2t} \\ & \frac{e^{2t}+1}{2} & \frac{e^{2t}-1}{2} \\ & \frac{e^{2t}-1}{2} & \frac{e^{2t}+1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} .$$

A exponencial e^{At} envolve as seguintes funções elementares

$$e^t \cos t , \quad e^t \sin t , \quad e^{-2t} , \quad 1 , \quad e^{2t} .$$

A única função limitada desta lista é a constante 1. Para que uma solução seja limitada, as condições iniciais, $y(0)$, devem ser tais que todas as outras funções não apareçam. Logo, terá que ser

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad e \quad a_4 = -a_5 .$$

O conjunto de todas as condições iniciais tais que as correspondentes soluções do problema de valor inicial são limitadas é

$$\left\{ y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ -a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} .$$

□

Considere o sistema de equações diferenciais

$$(\star\star) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = -(\sin t)y_1 + e^{\cos t} \\ \dot{y}_2 = e^{\sin t - \cos t}y_1 + (\cos t)y_2 + 3te^{\sin t} . \end{cases}$$

(9) (a) Determine a solução geral do sistema homogéneo associado:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -(\sin t)y_1 \\ \dot{y}_2 = e^{\sin t - \cos t}y_1 + (\cos t)y_2 . \end{cases}$$

(b) Determine a solução geral de $(\star\star)$.

(c) Determine a solução de $(\star\star)$ com condição inicial:

$$y_1(0) = 1 \quad \text{e} \quad y_2(0) = 0 .$$

Resolução:

(a) *O sistema homogéneo pode ser resolvido em duas etapas.*

Primeiro resolve-se a primeira equação

$$\dot{y}_1 = -(\sin t)y_1 .$$

Para $y_1 \neq 0$,

$$\frac{\dot{y}_1}{y_1} = -\sin t \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{\dot{y}_1}{y_1} dt = -\int \sin t dt + c$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y_1} dy_1 = \cos t + c$$

$$\Longleftrightarrow \quad \ln |y_1| = \cos t + c$$

$$\Longleftrightarrow \quad |y_1(t)| = k_1 e^{\cos t} \quad \text{onde } k_1 > 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y_1(t) = k_1 e^{\cos t} \quad \text{onde } k_1 \neq 0 .$$

Quando y_1 se anula, tem-se que $y_1(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, também é solução. Logo, a solução geral da primeira equação é

$$y_1(t) = k_1 e^{\cos t} , \quad \forall t \in \mathbb{R} , \quad \text{onde } k_1 \in \mathbb{R} .$$

De seguida, substitui-se a expressão geral para y_1 na segunda equação e resolve-se para obter y_2 :

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= e^{\sin t - \cos t} (k_1 e^{\cos t}) + (\cos t)y_2 \\ &= k_1 e^{\sin t} + \underbrace{(\cos t)}_{-a(t)} y_2 . \end{aligned}$$

Esta equação linear admite o factor de integração

$$e^{\int a(t) dt} = e^{-\sin t} .$$

Multiplicada por $e^{-\sin t}$, a equação fica

$$e^{-\sin t} \dot{y}_2 - (\cos t)e^{-\sin t} y_2 = k_1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} (e^{-\sin t} y_2) = k_1$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-\sin t} y_2 = k_1 t + k_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad y_2(t) = (k_1 t + k_2) e^{\sin t} .$$

A solução geral do sistema homogéneo é:

$$\begin{cases} y_1(t) = k_1 e^{\cos t} \\ y_2(t) = (k_1 t + k_2) e^{\sin t}, \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

- (b) A solução geral de $(\star\star)$ pode ser obtida a partir da solução geral do sistema homogéneo pela fórmula de variação das constantes:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Y(t) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int_0^t Y(t)Y(s)^{-1} \begin{bmatrix} e^{\cos s} \\ 3se^{\sin s} \end{bmatrix} ds,$$

onde $Y(t)$ é uma solução matricial fundamental do sistema homogéneo. Obtém-se uma tal matriz $Y(t)$ tomando para colunas soluções linearmente independentes do sistema homogéneo, como por exemplo

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix}$$

onde se fixou $k_1 = 0, k_2 = 1$ para a primeira coluna e $k_1 = 1, k_2 = 0$ para a segunda. Com esta escolha, a inversa de $Y(s)$ é

$$Y(s)^{-1} = \frac{-1}{e^{\cos s + \sin s}} \begin{bmatrix} se^{\sin s} & -e^{\cos s} \\ -e^{\sin s} & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução geral de $(\star\star)$ é

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix} \int_0^t \frac{-1}{e^{\cos s + \sin s}} \begin{bmatrix} se^{\sin s} & -e^{\cos s} \\ -e^{\sin s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\cos s} \\ 3se^{\sin s} \end{bmatrix} ds \\ = & \begin{bmatrix} c_2 e^{\cos t} \\ c_1 e^{\sin t} + c_2 t e^{\sin t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 2s \\ 1 \end{bmatrix} ds \\ = & \begin{bmatrix} c_2 e^{\cos t} \\ c_1 e^{\sin t} + c_2 t e^{\sin t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} (c_2 + t)e^{\cos t} \\ (c_1 + c_2 t + 2t^2)e^{\sin t} \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- (c) A solução deste problema de valor inicial pode ser obtida a partir da solução geral do sistema homogéneo pela fórmula de variação das constantes:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Y(t)Y(0)^{-1} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t Y(t)Y(s)^{-1} \begin{bmatrix} e^{\cos s} \\ 3se^{\sin s} \end{bmatrix} ds,$$

onde $Y(t)$ é uma solução matricial fundamental do sistema homogéneo, como por exemplo a utilizada na alínea anterior. Fazendo os cálculos,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{\cos t} \\ 2t^2 e^{\sin t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-1} e^{\cos t} \\ e^{-1} t e^{\sin t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{\cos t} \\ 2t^2 e^{\sin t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (e^{-1} + t) e^{\cos t} \\ (e^{-1} t + 2t^2) e^{\sin t} \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

□

Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$(10) \quad \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Resolução: Começa-se por resolver a segunda equação escalar que dá y_2 :

$$\frac{dy_2}{dt} = 2y_2 \quad \text{com} \quad y_2(0) = 0 .$$

A solução é

$$y_2(t) = 0 , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Substituindo y_2 , resolve-se agora a terceira equação escalar que dá y_3 :

$$\frac{dy_3}{dt} = 3y_3 + e^{2t} \quad \text{com} \quad y_3(0) = 0 .$$

A solução é

$$y_3(t) = \int_0^t e^{3(t-s)} e^{2s} ds = e^{3t} - e^{2t} , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Finalmente, substitui-se y_3 e resolve-se a primeira equação escalar que dá y_1 :

$$\frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + e^{3t} \quad \text{com} \quad y_1(0) = 0 .$$

A solução é

$$y_1(t) = \int_0^t e^{2(t-s)} e^{3s} ds = e^{3t} - e^{2t} , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

O problema de valor inicial dado tem a seguinte solução:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} - e^{2t} \\ 0 \\ e^{3t} - e^{2t} \end{bmatrix} , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

□

Comentário: Em alternativa, pode-se calcular a exponencial da matriz dos coeficientes e aplicar a fórmula de variação das constantes para sistemas de equações lineares. ◇

(11) Suponha que as funções

$$\begin{bmatrix} e^t + e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} e^t - e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$$

são três soluções $y(t)$ da equação $\dot{y} = Ay$. Determine os valores próprios de A . Justifique.

Resolução: Pela fórmula de variação das constantes, as soluções de sistemas lineares de equações de primeira ordem homogêneas, $\dot{y} = Ay$, são combinações lineares de exponenciais multiplicadas por potências de t da forma $t^k e^{\lambda t}$, onde λ é um valor próprio complexo da matriz dos coeficientes, A .

As três funções dadas envolvem as exponenciais e^t , e^{2t} e e^{3t} e o sistema de equações é 3 por 3.

Logo, os valores próprios de A são 1, 2 e 3. □

Equações de Ordem Superior à Primeira

(12) Considere a equação diferencial escalar

$$y^{(2)} + y = \cos t. \quad (*)$$

(a) Determine a solução geral da equação homogênea associada a (*).
 (b) Determine uma solução particular de (*).
 (c) Determine a solução geral de (*).

Resolução:

(a) A equação homogênea associada a (*) é

$$y^{(2)} + y = 0 \iff (D^2 + 1)y = 0.$$

O seu polinómio característico,

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$

tem as seguintes raízes:

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = \pm i.$$

A solução geral complexa da equação homogênea é pois

$$y(t) = k_1 e^{it} + k_2 e^{-it} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.

A solução geral (real) da equação homogênea é

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Comentário: A solução geral real obtém-se extraíndo as partes real e imaginária da solução geral complexa, usando a fórmula de Euler:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Reorganiza-se e rebaptiza-se as constantes para simplificar a expressão final. Convém fazer o exercício de passagem da solução geral complexa para a solução geral real.

◇

(b) *Adopta-se o método dos coeficientes indeterminados:*

A função $\cos t$ é aniquilada pelo operador diferencial $D^2 + 1$. Se $y(t)$ for solução particular de (\star) , i.e,

$$(D^2 + 1)y = \cos t ,$$

então, aplicando $D^2 + 1$ a ambos os membros, fica

$$(D^2 + 1)(D^2 + 1)y = (D^2 + 1)\cos t = 0 .$$

Vai-se procurar uma solução particular de (\star) entre a solução geral da equação homogénea

$$(D^2 + 1)^2 y = 0$$

a qual é dada por

$$y(t) = \underbrace{c_1 \cos t + c_2 \sin t}_{\text{solução particular}} + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t .$$

Os dois primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada a (\star) , logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-homogénea (\star) . Para encontrar uma solução particular, substitui-se $y(t) = c_3 t \cos t + c_4 t \sin t$ em (\star) e determina-se os coeficientes c_3 e c_4 :

$$\begin{aligned} (D^2 + 1)(c_3 t \cos t + c_4 t \sin t) &= \cos t \\ \iff -2c_3 \sin t + 2c_4 \cos t &= \cos t \\ \iff c_3 = 0 \quad \text{e} \quad c_4 &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Conclui-se que uma solução particular de (\star) é, por exemplo, $y(t) = \frac{1}{2} t \sin t$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

(c) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral de (\star) é da forma*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{solução particular} \\ \text{de } (\star) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{solução geral da equação} \\ \text{homogénea associada a } (\star) \end{array} \right\}$$

Assim, a solução geral de (\star) é

$$y(t) = \frac{1}{2} t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

□

(13)

Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais escalares.

(a)

$$y^{(3)} + \dot{y} = 0 ,$$

(b)

$$y^{(3)} + \dot{y} = e^t ,$$

(c)

$$y^{(3)} + \dot{y} = te^t ,$$

(d)

$$y^{(3)} + \dot{y} = 1 ,$$

(e)

$$y^{(3)} + \dot{y} = 1 + \cos t ,$$

(f)

$$y^{(3)} + \dot{y} = e^{2t} \cos t .$$

Resolução:(a) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^3 + D)y = 0 .$$

O seu polinómio característico,

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda ,$$

tem as raízes

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \pm i .$$

A solução geral complexa da equação homogénea é pois

$$y(t) = k_0 + k_1 e^{it} + k_2 e^{-it} , \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

*onde $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.**A solução geral (real) da equação homogénea é*

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t , \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

*onde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.***Comentário:** *A solução geral real obtém-se extraindo as partes real e imaginária da solução geral complexa, usando a fórmula de Euler:*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t .$$

Reorganiza-se e rebaptiza-se as constantes para simplificar a expressão final. Recomenda-se o exercício de passagem da solução geral complexa para a solução geral real. \diamond (b) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral é da forma*

$$\{ \text{solução particular} \} + \left\{ \begin{array}{l} \text{solução geral da equação} \\ \text{homogénea associada} \end{array} \right\} .$$

Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função e^t é aniquilada pelo operador diferencial $D - 1$. Se $y(t)$ for solução particular da equação dada, i.e,

$$D(D^2 + 1)y = e^t ,$$

então, aplicando $D - 1$ a ambos os membros, fica

$$(D - 1)D(D^2 + 1)y = (D - 1)e^t = 0 .$$

Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea

$$(D - 1)D(D^2 + 1)y = 0$$

a qual é dada por

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t}_{\text{solução homogénea}} + c_3 e^t .$$

Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se $y(t) = c_3 e^t$ na equação e determina-se o coeficiente c_3 :

$$\begin{aligned} D(D^2 + 1)(c_3 e^t) &= e^t \\ \iff 2c_3 e^t &= e^t \\ \iff c_3 &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Uma solução particular é, por exemplo, $y(t) = \frac{1}{2}e^t$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Conclui-se que a solução geral desta equação é

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2}e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(c) Como se trata de uma equação linear, a solução geral de é da forma

$$\{ \text{solução particular} \} + \left\{ \begin{array}{l} \text{solução geral da equação} \\ \text{homogénea associada} \end{array} \right\}.$$

Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função te^t é aniquilada pelo operador diferencial $(D-1)^2$. Se $y(t)$ for solução particular da equação dada, i.e.,

$$D(D^2 + 1)y = te^t,$$

então, aplicando $(D-1)^2$ a ambos os membros, fica

$$(D-1)^2 D(D^2 + 1)y = (D-1)^2 te^t = 0.$$

Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea

$$(D-1)^2 D(D^2 + 1)y = 0$$

a qual é dada por

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t}_{\text{solução homogénea}} + c_3 e^t + c_4 t e^t.$$

Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se $y(t) = c_3 e^t + c_4 t e^t$ na equação e determina-se os coeficientes c_3 e c_4 :

$$\begin{aligned} D(D^2 + 1)(c_3 e^t + c_4 t e^t) &= te^t \\ \iff 2c_3 e^t + 4c_4 e^t + 2c_4 t e^t &= te^t \\ \iff 2c_3 + 4c_4 = 0 \text{ e } 2c_4 &= 1 \\ \iff c_3 = -1 \text{ e } c_4 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Uma solução particular é, por exemplo, $y(t) = -e^t + \frac{1}{2}te^t$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Conclui-se que a solução geral desta equação é

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t - e^t + \frac{1}{2}te^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(d) Como se trata de uma equação linear, a solução geral de é da forma

$$\{ \text{solução particular} \} + \left\{ \begin{array}{l} \text{solução geral da equação} \\ \text{homogénea associada} \end{array} \right\}.$$

Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função 1 é aniquilada pelo operador diferencial D . Se $y(t)$ for solução particular da equação dada, i.e.,

$$D(D^2 + 1)y = 1,$$

então, aplicando D a ambos os membros, fica

$$D^2(D^2 + 1)y = D1 = 0.$$

Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea

$$D^2(D^2 + 1)y = 0$$

a qual é dada por

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t}_{\text{homogénea}} + c_3 t .$$

Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se $y(t) = c_3 t$ na equação e determina-se o coeficiente c_3 :

$$D(D^2 + 1)(c_3 t) = 1 \iff c_3 = 1 .$$

Uma solução particular é, por exemplo, $y(t) = t$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Conclui-se que a solução geral desta equação é

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + t , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

(e) Como se trata de uma equação linear, a solução geral de é da forma

$$\left\{ \text{solução particular} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{solução geral da equação} \\ \text{homogénea associada} \end{array} \right\} .$$

Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função $1 + \cos t$ é aniquilada pelo operador diferencial $D(D^2 + 1)$, porque D aniquila 1 e $D^2 + 1$ aniquila $\cos t$. Se $y(t)$ for solução particular da equação dada, i.e,

$$D(D^2 + 1)y = 1 + \cos t ,$$

então, aplicando $D(D^2 + 1)$ a ambos os membros, fica

$$D^2(D^2 + 1)^2 y = D(D^2 + 1)(1 + \cos t) = 0 .$$

Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea

$$D^2(D^2 + 1)^2 y = 0$$

a qual é dada por

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t}_{\text{homogénea}} + c_3 t + c_4 t \cos t + c_5 t \sin t .$$

Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se $y(t) = c_3 t + c_4 t \cos t + c_5 t \sin t$ na equação e determina-se os coeficientes c_3 , c_4 e c_5 :

$$\begin{aligned} D(D^2 + 1)(c_3 t + c_4 t \cos t + c_5 t \sin t) &= 1 + \cos t \\ \iff c_3 - 2c_4 \cos t - 2c_5 \sin t &= 1 + \cos t \\ \iff c_3 = 1 \text{ e } c_4 = -\frac{1}{2} \text{ e } c_5 = 0 . \end{aligned}$$

Uma solução particular é, por exemplo, $y(t) = t - \frac{t}{2} \cos t$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Conclui-se que a solução geral desta equação é

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + t - \frac{t}{2} \cos t , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

(f) Basta encontrar uma solução particular para a equação. A função $e^{2t} \cos t$ é aniquilada pelo operador diferencial $(D - 2)^2 + 1$. Assim, uma solução particular da equação será uma solução da equação homogénea

$$D(D^2 + 1) ((D - 2)^2 + 1) y = 0$$

A solução geral desta equação é dada por

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 e^{2t} \cos t + c_4 e^{2t} \sin t$$

Os três primeiros termos são soluções da equação homogénea inicial por isso podemos fazer $c_0 = c_1 = c_2 = 0$. Tendo em conta que

$$(D^2 + 1)(e^{2t} \cos t) = 4e^{2t} \cos t - 4e^{2t} \sin t$$

e que

$$(D^2 + 1)(e^{2t} \sin t) = 4e^{2t} \cos t + 4e^{2t} \sin t ,$$

substituindo $c_3 e^{2t} \cos t + c_4 e^{2t} \sin t$ na equação, obtém-se

$$\begin{aligned} & (D^2 + 1)D(c_3 e^{2t} \cos t + c_4 e^{2t} \sin t) = e^{2t} \cos t \\ \Leftrightarrow & (D^2 + 1)((2c_3 + c_4)e^{2t} \cos t + (2c_4 - c_3)e^{2t} \sin t) = e^{2t} \cos t \\ \Leftrightarrow & (4(2c_3 + c_4) + 4(2c_4 - c_3))e^{2t} \cos t + (4(2c_4 - c_3) - 4(2c_3 + c_4))e^{2t} \sin t = e^{2t} \cos t \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4c_3 + 12c_4 = 1 \\ 4c_4 - 12c_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} c_3 = \frac{1}{40} \\ c_4 = \frac{3}{40} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$y(t) = \frac{1}{40}e^{2t} \cos t + \frac{3}{40}e^{2t} \sin t$$

é uma solução particular. Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_0 t + c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{40}e^{2t} \cos t + \frac{3}{40}e^{2t} \sin t , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

□

Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

- (14)
- (a) $y^{(3)} + y^{(2)} + \dot{y} + y = 0 ;$
- (b) $y^{(3)} + y^{(2)} + \dot{y} + y = 1 + e^t \sin t ;$
- (c) $y^{(2)} - \dot{y} - 2y = 2e^{2t} - 2 ;$
- (d) $y^{(3)} - 2\pi y^{(2)} + \pi^2 \dot{y} = 2\pi^3 t ;$
- (e) $y^{(3)} - 2y^{(2)} + 2\dot{y} = e^{-t} \cos t$

Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

(15)
$$\begin{cases} y^{(3)} + \dot{y} = e^t \\ y(0) = 1 , \dot{y}(0) = 1 , y^{(2)}(0) = \frac{1}{2} . \end{cases}$$

Resolução: Pela alínea (b) do exercício 13, a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2}e^t \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

As derivadas desta solução são

$$\dot{y}(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + \frac{1}{2}e^t$$

$$y^{(2)}(t) = -c_1 \cos t - c_2 \sin t + \frac{1}{2}e^t .$$

A condição inicial impõe que

$$1 = y(0) = c_0 + c_1 + \frac{1}{2}$$

$$1 = \dot{y}(0) = c_2 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = y^{(2)}(0) = -c_1 + \frac{1}{2}$$

donde se conclui que

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = 0 \quad e \quad c_2 = \frac{1}{2} .$$

Logo, a solução deste problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2}e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

□

Determine a solução da equação linear escalar

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + \dot{y} = b(t)$$

(16) que verifica as condições iniciais $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, $y^{(2)}(0) = 1$, quando

(a) $b(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$;

(b) $b(t) = t, \forall t \in \mathbb{R}$;

(c) $b(t) = e^t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Resolução:

(a) A equação homogénea pode ser escrita

$$(D^3 + 2D^2 + D)y = 0 \quad \text{ou seja} \quad D(D+1)^2y = 0$$

cuja solução geral é

$$y(t) = c_0 + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. As derivadas desta solução são:

$$\dot{y}(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t}$$

$$y^{(2)}(t) = c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-t} + c_2 t e^{-t} .$$

No valor inicial tem-se

$$y(0) = c_0 + c_1$$

$$\dot{y}(0) = -c_1 + c_2$$

$$y^{(2)}(0) = c_1 - 2c_2 .$$

A condição inicial impõe que

$$\begin{cases} c_0 + c_1 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = -1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Logo, a solução do problema é

$$y(t) = 1 - e^{-t} - t e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

(b) A solução geral de uma equação linear não homogénea pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada. Para obter uma solução particular da equação com $b(t) = t$, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados:

- t é solução de $D^2y = 0$;
- se y é solução de $(D^3 + 2D^2 + D)y = t$, então

$$D^2(D^3 + 2D^2 + D)y = D^2t = 0 ;$$

- procura-se uma solução particular da equação dada entre a solução geral da equação homogénea,

$$D^2(D^3 + 2D^2 + D)y = 0 \quad \text{ou seja} \quad D^3(D + 1)^2y = 0 ,$$

que é

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1e^{-t} + c_2te^{-t}} + c_3t + c_4t^2 ;$$

- os termos sobre a chaveta constituem a solução geral da equação homogénea, logo não adiantam na busca de uma solução particular da equação não homogénea;
- toma-se como candidata para solução particular uma função da forma

$$y(t) = c_3t + c_4t^2$$

a qual tem as seguintes derivadas

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= c_3 + 2c_4t \\ y^{(2)}(t) &= 2c_4 \\ y^{(3)}(t) &= 0 ; \end{aligned}$$

- os coeficientes c_3 e c_4 determinam-se substituindo na equação:

$$\begin{aligned} y^{(3)} + 2y^{(2)} + \dot{y} &= t \\ \iff 0 + 4c_4 + c_3 + 2c_4t &= t \\ \iff 4c_4 + c_3 = 0 \text{ e } 2c_4 &= 1 \\ \iff c_3 = -2 \text{ e } c_4 = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Obteve-se a solução particular

$$y(t) = -2t + \frac{1}{2}t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

A solução geral da equação diferencial dada é

$$y(t) = \underbrace{-2t + \frac{1}{2}t^2}_{\text{sol. particular}} + \underbrace{c_0 + c_1e^{-t} + c_2te^{-t}}_{\text{sol. geral da eq. hom.}} \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

onde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. As derivadas desta solução são:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -2 + t - c_1e^{-t} + c_2e^{-t} - c_2te^{-t} \\ y^{(2)}(t) &= 1 + c_1e^{-t} - 2c_2e^{-t} + c_2te^{-t} . \end{aligned}$$

No valor inicial tem-se

$$\begin{aligned} y(0) &= c_0 + c_1 \\ \dot{y}(0) &= -2 - c_1 + c_2 \\ y^{(2)}(0) &= 1 + c_1 - 2c_2 . \end{aligned}$$

A condição inicial impõe que

$$\begin{cases} c_0 + c_1 = 0 \\ -2 - c_1 + c_2 = 0 \\ 1 + c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 = 4 \\ c_1 = -4 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

Logo, a solução do problema é

$$y(t) = -2t + \frac{1}{2}t^2 + 4 - 4e^{-t} - 2te^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

(c) A solução geral de uma equação linear não homogénea pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada. Para obter uma solução particular da equação com $b(t) = e^t$, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados:

- e^t é solução de $(D - 1)y = 0$;
- se y é solução de $(D^3 + 2D^2 + D)y = e^t$, então

$$(D - 1)(D^3 + 2D^2 + D)y = (D - 1)e^t = 0 ;$$

- procura-se uma solução particular da equação dada entre a solução geral da equação homogénea,

$$(D - 1)(D^3 + 2D^2 + D)y = 0$$

ou seja

$$(D - 1)D(D + 1)^2y = 0 ,$$

que é

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1e^{-t} + c_2te^{-t}} + c_3e^t ;$$

- os termos sobre a chaveta constituem a solução geral da equação homogénea, logo não adiantam na busca de uma solução particular da equação não homogénea;
- toma-se como candidata para solução particular uma função da forma

$$y(t) = c_3e^t$$

que tem as seguintes derivadas

$$\dot{y}(t) = y^{(2)}(t) = y^{(3)}(t) = c_3e^t ;$$

- o coeficiente c_3 determina-se substituindo na equação:

$$\begin{aligned} & y^{(3)} + 2y^{(2)} + \dot{y} = e^t \\ \iff & (c_3 + 2c_3 + c_3)e^t = e^t \\ \iff & c_3 = \frac{1}{4} . \end{aligned}$$

Obteve-se a solução particular

$$y(t) = \frac{1}{4}e^t , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

A solução geral da equação diferencial dada é

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{4}e^t}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{c_0 + c_1e^{-t} + c_2te^{-t}}_{\text{sol. geral da eq. hom.}} \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

onde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. As derivadas desta solução são:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{1}{4}e^t - c_1e^{-t} + c_2e^{-t} - c_2te^{-t} \\ y^{(2)}(t) &= \frac{1}{4}e^t + c_1e^{-t} - 2c_2e^{-t} + c_2te^{-t} . \end{aligned}$$

No valor inicial tem-se

$$y(0) = \frac{1}{4} + c_0 + c_1$$

$$\dot{y}(0) = \frac{1}{4} - c_1 + c_2$$

$$y^{(2)}(0) = \frac{1}{4} + c_1 - 2c_2 .$$

A condição inicial impõe que

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + c_0 + c_1 = 0 \\ \frac{1}{4} - c_1 + c_2 = 0 \\ \frac{1}{4} + c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = -\frac{1}{4} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, a solução do problema é

$$y(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

□

(17) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y^{(3)} - 2y^{(2)} + \dot{y} = -4 + 2t \\ y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0, y^{(2)}(0) = 2 . \end{cases}$$

(18) Considere a equação diferencial escalar

$$y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} + \dot{y} = 0 .$$

(a) Determine a sua solução geral.
 (b) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm solução convergente quando $t \rightarrow +\infty$.

Resolução:

(a) O polinómio característico da equação é

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda$$

cuja factorização em monómios é

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i) .$$

Comentário: Para chegar a esta factorização, repara-se na raiz 0 e adivinha-se a raiz -1. ◇

A solução geral (real) da equação é

$$y(t) = c_1 + c_2e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

(b) Para que uma solução seja convergente quando $t \rightarrow +\infty$, ela não pode envolver as funções $\cos t$ nem $\sin t$. Procuram-se então as condições iniciais em $t = 0$ que implicam que c_3 e c_4 sejam 0. Uma vez que

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 + c_2e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t \\ \dot{y}(t) &= -c_2e^{-t} - c_3 \sin t + c_4 \cos t \\ y^{(2)}(t) &= c_2e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t \\ y^{(3)}(t) &= -c_2e^{-t} + c_3 \sin t - c_4 \cos t \end{aligned}$$

os valores em $t = 0$ são

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + c_3 \\ \dot{y}(0) &= -c_2 + c_4 \\ y^{(2)}(0) &= c_2 - c_3 \\ y^{(3)}(0) &= -c_2 - c_4 \end{aligned}$$

donde sai que

$$\begin{aligned}c_1 &= y(0) + \dot{y}(0) - y^{(2)}(0) + y^{(3)}(0) \\c_2 &= -\frac{1}{2}(\dot{y}(0) + y^{(3)}(0)) \\c_3 &= -\frac{1}{2}(\dot{y}(0) + y^{(3)}(0)) - y^{(2)}(0) \\c_4 &= \frac{1}{2}(\dot{y}(0) - y^{(3)}(0)) .\end{aligned}$$

Para que a solução do problema de valor inicial seja convergente quando $t \rightarrow +\infty$, terá que ser

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{2}(\dot{y}(0) + y^{(3)}(0)) - y^{(2)}(0) \\0 &= \frac{1}{2}(\dot{y}(0) - y^{(3)}(0))\end{aligned}$$

ou seja,

$$\dot{y}(0) = -y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) .$$

O conjunto de todas as condições iniciais tais que as correspondentes soluções do problema de valor inicial são convergentes quando $t \rightarrow +\infty$ é

$$\{(y(0), \dot{y}(0), y^{(2)}(0), y^{(3)}(0)) = (a, b, -b, b) : a, b \in \mathbb{R}\} .$$

□