Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

CIVIL

FICHA 5 – EQUAÇÕES LINEARES VECTORIAIS E EQUAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR À PRIMEIRA

para entregar na aula teórica de **6ª feira, 26 de Maio**

(1) Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

(a) Quais são os valores próprios de A?
(b) Quais são os vectores próprios de A?
(c) Determine uma matriz de mudança de base, S, que diagonaliza A, e determine a sua inversa, S^{-1}.
(d) Calcule e^{At}.
(e) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$
(f) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$
(g) Escreva duas funções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior.

(2) Para cada uma das matrizes A seguintes, determine e^{At}.

(a)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Date: 10 de Maio de 2000.

(3) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(4) Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} & = & 2y_1 + 2y_2 + t \\ \frac{dy_2}{dt} & = & 2y_1 + 2y_2 \ . \end{cases}$$

(5) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais escalares:

(a) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 0$;

(b) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1$;

(c) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t}$;

(d) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1 + e^{-2t}$.

(6) Determine a solução que verifica as condições iniciais $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ e $y^{(2)}(0) = 1$ para as seguintes equações diferenciais escalares:

(a) $y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5\dot{y} = e^t + t$;

(b) $y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5\dot{y} = e^{2t} \cos t$.