Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – CIVIL

FICHA 6 – SÉRIES DE FOURIER E MÉTODO DE SEPARAÇÃO DAS VARIÁVEIS

para entregar na aula teórica de **6ª feira, 9 de Junho**

(1) Determine o desenvolvimento em série de Fourier das seguintes funções:
 (a) $f(x) = x$ para $x \in [-1, 1]$;
 (b) $f(x) = x + 1$ para $x \in [-1, 1]$;
 (c) $f(x) = \cos^3 x$ para $x \in [-\pi, \pi]$.

(2) Determine o desenvolvimento em série de senos das seguintes funções:
 (a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$;
 (b) $f(x) = \cos x$ para $x \in [0, 2\pi]$.

(3) Determine o desenvolvimento em série de cosenos das seguintes funções:
 (a) $f(x) = x^2$ para $x \in [0, 1]$;
 (b) $f(x) = e^{2x}$ para $x \in [0, 2\pi]$.

(4) Recorrendo ao método de separação de variáveis determine uma solução do seguinte problema de valor na fronteira para a equação do calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, x) = \sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(8x) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{cases}$$

para $0 \leq x \leq \pi$ e $t \geq 0$.

(5) Seja c um parâmetro real positivo. Recorrendo ao método de separação de variáveis determine uma solução do seguinte problema para a equação das ondas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, x) = \cos x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 1 \end{cases}$$

para $0 \leq x \leq 2\pi$ e $t \geq 0$ (verificando a equação diferencial para $0 < x < 2\pi$).

Sugestão: Comece por determinar uma solução estacionária (isto é da forma $u(t, x) = v(x)$) da equação diferencial que satisfaça as condições na fronteira para $x = 0$ e $x = 2\pi$.
Pode também aproveitar o resultado da alínea 2(b).

...continua...

Date: 27 de Maio de 2000.

(6) Recorrendo ao método de separação de variáveis determine uma solução para o seguinte problema de valor na fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \\ u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = 0 \\ u(1,y) = y \end{cases}$$

para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ (verificando a equação diferencial para $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$).