

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

CIVIL

FICHA AVANÇADA 1 – ANÁLISE COMPLEXA

(estes exercícios destinam-se a quem já domina bem os exercícios das fichas normais)

- (1) Sejam a, b, c três pontos na circunferência de raio 1 do plano complexo satisfazendo $a + b + c = 0$. Prove que a, b, c são os vértices de um triângulo equilátero.
- (2) Demonstre que a função $f(z)$ é diferenciável em z_0 se e só se a função $\overline{f(\bar{z})}$ é diferenciável em \bar{z}_0 .
- (3) Esboce o conjunto dos logaritmos de $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 1\}$.

- (4) Mostre que, para $|z| < 1$, se tem

$$\begin{aligned} & (1 + z + z^2 + \dots + z^9) \cdot \\ & (1 + z^{10} + z^{20} + \dots + z^{90}) \cdot \\ & (1 + z^{100} + z^{200} + \dots + z^{900}) \dots = \frac{1}{1-z} . \end{aligned}$$

- (5) Sejam a e b números complexos cujas partes reais são negativas ou 0. Demonstre a desigualdade $|e^a - e^b| \leq |a - b|$.
- (6) Mostre que existe uma função complexa analítica definida em $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ cuja derivada é

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} .$$

- (7) Considere a sequência de números a_0, a_1, a_2, \dots definida pela equação

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n , \quad 0 < x < 1 .$$

Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} .$$

- (8) Sejam P e Q polinómios complexos com o grau de Q pelo menos dois mais do que o grau de P . Mostre que existe um raio $R > 0$ para o qual

$$\oint_{\gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0 ,$$

qualquer que seja a curva fechada simples γ fora do disco $|z| \leq R$.