Tópicos da matéria para o segundo teste de CDI2

0. Método dos multiplicadores de Lagrange:

(i) Achar máximos e mínimos de funções numéricas em curvas e superfícies (mais geralmente em variedades).

(ii) Achar máximos e mínimos de funções numéricas em regiões do plano limitadas por curvas e regiões do espaço limitadas por superficies.

1. Integração

1. Integrais de funções numéricas em regiões do plano e em volumes

(i) **Teorema de Fubini:**

(a) Achar os limites de integração para calcular integrais sobre uma região do plano (integrais duplos).

(b) Achar os limites de integração para calcular integrais sobre uma região do espaço (integrais triplos).

(c) Calcular integrais duplos e triplos integrando duas ou três vezes como em Cálculo I.

(ii) **Mudança de variável:**

(i) Saber aplicar o teorema para uma mudança de variável qualquer.

(ii) Saber quando e como usar

- Coordenadas polares
- Coordenadas cilíndricas
- Coordenadas esféricas

2. Integrais de funções numéricas em curvas e superfícies

(i) Saber parametrizar curvas (um único parâmetro) e superfícies (dois parâmetros) (Eliminar variáveis (duas para curvas, uma para superfícies) usando as equações que definem a curva ou superfície num sistema de coordenadas adequado)

(ii) Integrais de linha: $\int_C f ds = \int_a^b f(g(t))\|g'(t)\|dt$

(iii) Integrais de superfície: $\iint_S f\, dS = \iint_{g^{-1}(S)} f(g(t,s))\sqrt{\det Dg(t,s)^T Dg(t,s)}dtds.$

Conhecer aplicações de integrais de funções numéricas (1. e 2.) ao cálculo de massa, carga, centro de massa, centróide, momento de inércia, médias, etc.

3. Integrais de funções vectoriais em curvas (trabalho) e superfícies (fluxo)

(i) Integral de linha de um campo vectorial: $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \pm\int_a^b \vec{F}(g(t))\cdot g'(t)dt$

(ii) Fluxo de um campo vectorial: $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \pm\iint_{g^{-1}(S)} \vec{F}(g(t,s))\cdot\frac{\partial g}{\partial t}\times\frac{\partial g}{\partial s}\, dtds.$

4. Teoremas fundamentais do Cálculo:

(i) Teorema Fund. do Cálculo para integrais de linha: $\int_A^B \nabla\varphi\cdot d\vec{r} = \varphi(B)-\varphi(A)$

(a) Saber se um campo vectorial é um gradiente (conservativo) - tem de ser fechado (isto é, $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$) e basta isso se o conjunto onde o campo está definido é simplesmente conexo.

(b) Saber achar o potencial de um campo vectorial conservativo $\vec{F}$ (isto é, uma função numérica φ tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$).

(ii) Teorema de Green: $\iint_A(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy = \int_{\partial A}(P,Q)\cdot d\vec{r}$ (com A à esquerda).

(iii) Teorema da divergência: $\iiint_V \operatorname{div}\vec{F} = \iint_{\partial V}\vec{F}\cdot\vec{n}^{\text{ext}}\, dS$

(iv) Teorema de Stokes: $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n} = \int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ (sentido dado pela regra da mão direita).

(a) Saber se um campo vectorial é um rotacional - tem de ter divergência zero e basta isso se o conjunto onde o campo está definido é 2-conexo (por exemplo, em estrela).

(b) Saber achar o potencial vector de um campo rotacional $\vec{F}$ (isto é, um campo vectorial $\vec{A}$ tal que $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{F}$.