Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Exame de Topologia Algébrica

22 de Dezembro de 2005

Duração: 3h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Mostre que um retrato de um espaço contráctil é contráctil.

2. Seja $0 < k < n$. Seja X o espaço que se obtém de S^n identificando os pontos antípodas em $S^k \subset S^n$.

(a) Calcule $H_*(X; \mathbb{Z})$.

(b) Calcule[1] $H_*(X; \mathbb{Z}_2)$.

(c) Calcule os grupos $H^*(X; \mathbb{Z})$.

(d) Calcule os grupos $H^*(X; \mathbb{Z}_6)$.

3. S^2 é a compactificação de Alexandroff de $\mathbb{C}$ e portanto um polinómio complexo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induz uma aplicação $\overline{f}\colon S^2 \to S^2$. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raíz de f mostre que o grau local de $\overline{f}$ em z_0 é a ordem do zero. Conclua que o grau de $\overline{f}$ é o grau do polinómio f.

4. Mostre que se n é par, qualquer aplicação $\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ tem um ponto fixo. *Sugestão: Use a estrutura de anel em cohomologia.*

5. Seja $h : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ a aplicação de Hopf. O espaço que se obtém de $\mathbb{C}P^n$ colando uma célula de dimensão $2n+2$ por h é portanto homeomorfo a $\mathbb{C}P^{n+1}$. Seja $f : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ uma aplicação de grau k e $g = hf\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$. Seja X o espaço que se obtém de $\mathbb{C}P^n$ colando uma célula de dimensão $2n+2$ pela aplicação g.

(a) Descreva o anel $H^*(X; \mathbb{Z})$. *Sugestão: Comece por definir uma aplicação $X \to \mathbb{C}P^{n+1}$.*

(b) Calcule[2] o anel $H^*(X \times M(\mathbb{Z}_3, 2); \mathbb{Z})$ (onde $M(\mathbb{Z}_3, 2)$ designa como habitualmente o espaço que se obtém de S^2 colando uma célula de dimensão 3 por uma aplicação de grau 3).

6. Calcule $H_*(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2; \mathbb{Z})$.

Responda a uma das seguintes duas perguntas.

7. (a) Suponha que $X = \cup_{i=1}^n U_i$ com U_i abertos contrácteis. Mostre que se α_i com $i = 1, \ldots, n$ são classes de cohomologia de X com $|\alpha_i| > 0$, então $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = 0$. *Sugestão: Use o isomorfismo $H^j(X, U_i) \to H^j(X)$ válido para $j > 0$.*

(b) Quantos abertos contrácteis são necessários para cobrir $\mathbb{C}P^n$?

---

[1] Se não tiver feito a alínea anterior, assuma a partir de agora que $H_j(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2, 0, \mathbb{Z}, 0$ para $1 \leq j \leq k$, $k < j < n$, $j = n$ e $j > n$ respectivamente.

[2] Use $X = \mathbb{C}P^2 \times S^3$ se não fez a alínea anterior.

8. (a) Seja $(A, \leq)$ um conjunto dirigido contável, e $(G_\alpha, f_{\alpha\beta})$ um sistema de grupos abelianos contáveis. Mostre que

$$\lim_{\alpha} G_\alpha$$

é contável.

(b) Mostre que se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, então $H_j(U;\mathbb{Z})$ é contável para todo o j.

Responda a uma das seguintes três perguntas

9. Mostre que se M é uma variedade fechada, orientável de dimensão $2k$ e $H_{k-1}(M;\mathbb{Z})$ é livre de torção, então o mesmo acontece com $H_k(M;\mathbb{Z})$.

10. Seja R um anel. Mostre que se M é uma variedade orientável sobre R, o mesmo sucede com ∂M.

11. Calcule $H_i(S^3, S^3 \setminus \Sigma_g; \mathbb{Z})$ onde Σ_g é a imagem por um mergulho de uma superfície orientável de género g.