Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º Teste de Topologia Algébrica

9 de Novembro de 2004
LMAC e MMA

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. [**4**] Seja $f\colon X \to Y$ e seja M_f o cilindro de f. Recorde que X se inclui em M_f através da aplicação $x \mapsto [x, 0]$, onde $[x, 0]$ denota a classe de equivalência de $(x, 0)$. Mostre que X é um retrato de M_f sse existe $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$.

2. (a) [**4**] Seja X um espaço topológico e seja SX a sua suspensão. Mostre que $\widetilde{H}_n(X) \approx \widetilde{H}_{n+1}(SX)$, para todo o n.

(b) [**4**] Seja $I = [0, 1]$. Calcule os grupos de homologia de $Y := \partial I^2 \cup ((\mathbb{Q} \cap I) \times I)$.

3. [**4**] Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão n tais que $\oplus_{k \geq 0} H_k(M)$ e $\oplus_{k \geq 0} H_k(N)$ são de tipo finito. Usando a sucessão de Mayer-Vietoris, deduza a expressão de $\chi(M \# N)$ em função de $\chi(M)$ e $\chi(N)$.

4. Seja X o espaço que se obtém de S^1 colando duas células-2 através de aplicações de graus 2 e 3, respectivamente. Resolva **uma** das alíneas seguintes:

(a) [**4**] Calcule $H_*(X)$ usando homologia celular;

(b) [**4**] Mostre que $X \cong S^2$.
Sugestão: Use os critérios dados para equivalência de homotopia.