Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º Teste de Topologia Algébrica

3 de Novembro de 2005

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Mostre que se um complexo celular X é a união de dois subcomplexos celulares $X_1, X_2 \subset X$ tais que X_1, X_2 e $X_1 \cap X_2$ são contrácteis, então X é contráctil.

Sugestão: Recorde que se $i\colon A \hookrightarrow X$ tem a propriedade da extensão das homotopias e é uma equivalência de homotopia, então X retrai-se por deformação em A.

2. Seja X o espaço que se obtém de $S^1 \times S^1$ colando uma célula de dimensão 2 por uma aplicação $S^1 \to S^1 \times \{1\} \subset S^1 \times S^1$ de grau 3.

(a) Calcule $H_*(X)$.

(b) Calcule $H_*(X; \mathbb{Z}/3)$.

Resolva duas das seguintes perguntas:

3. Mostre que não existe uma aplicação injectiva e contínua $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ se $m > n$. *Sugestão: Comece por ver que uma tal aplicação seria necessariamente aberta.*

4. Seja G um grupo topológico conexo por arcos, X um complexo simplicial finito e $G \times X \to X$ uma acção (contínua). Mostre que se $\chi(X) \neq 0$ então para todo o $g \in G$ existe $x \in X$ tal que $g \cdot x = x$.

5. Mostre que se X e Y são complexos celulares finitos, então $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

6. Recorde que $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$. Mostre que se $f : D^1 \to D^1 \times D^2$ e $g\colon D^2 \to D^1 \times D^2$ são mergulhos que satisfazem

$$f(x) = (x, 0) \text{ se } x \in S^0 \qquad g(x) = (0, x) \text{ se } x \in S^1$$

então $f(D^1) \cap g(D^2) \neq \emptyset$.[1]

Sugestão: Use a sucessão exacta do par e excisão para ver que a inclusão $\partial(D^1 \times D^2) \setminus (0 \times S^1) \subset (D^1 \times D^2) \setminus g(D^2)$ induz um isomorfismo em homologia.

[1] Isto é verdade para $D^p \times D^q$ com $p, q \geq 1$ quaisquer (trabalho para casa).