Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º Teste de Topologia Algébrica

11 de Janeiro de 2005
LMAC e MMA

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. (a) [**2**] Calcule os grupos de cohomologia $H^*(\mathbb{R}P^2; R)$ e $H^*(S^2; R)$, para $R = \mathbb{Z}$ e $R = \mathbb{Z}_2$, usando cohomologia celular.
Nota: Pode usar o cálculo do complexo celular de $\mathbb{R}P^2$ feito na aula.

(b) [**2**] Seja $q\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1 = S^2$ a aplicação que envia $\mathbb{R}P^1$ num ponto. Mostre que $q_*\colon \widetilde{H}_*(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \to \widetilde{H}_*(S^2; \mathbb{Z})$ é trivial mas $q^*\colon H^2(S^2; \mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z})$ é não trivial.

(c) [**2**] Mostre que a cisão no teorema dos coeficientes universais para cohomologia não é natural.

2. [**4**] Seja X o espaço que se obtém de $\mathbb{C}P^2$ colando uma célula-3 através de uma aplicação $S^2 \to \mathbb{C}P^1$ de grau p. Calcule os anéis $H^*(X; \mathbb{Z})$ e $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$.

3. [**5**] Sejam M, N variedades-n compactas, conexas e orientáveis. Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação contínua tal que $f^*\colon H^n(N; \mathbb{Q}) \to H^n(M; \mathbb{Q})$ é não trivial. Mostre que, para todo o k, o homomorfismo $f^*\colon H^k(N; \mathbb{Q}) \to H^k(M; \mathbb{Q})$ é injectivo.

4. Seja M uma variedade conexa de dimensão n. Mostre que

(a) [**2**] $H^n(M; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$, se M é compacta orientável;

(b) [**3**] $H^n(M; \mathbb{Z}) = 0$, se M não é compacta.
Sugestão: Use o que sabe acerca de $H_n(M; \mathbb{Z})$ e $H_n(M; \mathbb{Z}_p)$.

TPC: $H^n(M; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}_2$, se M é compacta, não orientável.