Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º Teste de Topologia Algébrica

15 de Dezembro de 2005

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o espaço X que se obtém de S^2 colando duas células de dimensão 3 por aplicações de grau 4 e 6 respectivamente.

(a) Usando cohomologia celular, calcule os grupos de cohomologia de X com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}$.

(b) Calcule[1] $H_*(X \times \mathbb{R}P^2; \mathbb{Z})$.

2. Calcule o anel de cohomologia de $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{R}P^4$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_2$.

3. Seja X um espaço topológico com

$$H_n(X;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, 3 \text{ ou } 6, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine $H^*(X;\mathbb{Z})$ como anel.

(b) X tem o tipo de homotopia de uma variedade de dimensão 6?

(c) (bónus) Dê um exemplo[2] de um espaço X satisfazendo as condições do enunciado.

Resolva uma das seguintes perguntas:

4. Mostre que uma variedade fechada de dimensão ímpar tem característica de Euler nula. Há alguma restrição sobre a característica de Euler de uma variedade de dimensão par?

5. Seja M uma variedade fechada e simplesmente conexa. Mostre que existe $r \geq 0$ tal que

$$H^k(M;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0, 4, \\ \mathbb{Z}^r & \text{se } k = 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A forma quadrática sobre $H^2(M;\mathbb{R})$ definida pelo produto cup é necessariamente definida positiva ou negativa?

6. Descreva o anel $H^*(\mathbb{C}P^\infty/\mathbb{C}P^1;\mathbb{Z})$ em termos de geradores e relações. $\mathbb{C}P^\infty/\mathbb{C}P^1$ tem o mesmo tipo de homotopia que $S^6 \times \mathbb{H}P^\infty$?

7. Seja G um grupo abeliano. Mostre que

$$H^n_c(X \times \mathbb{R}; G) \simeq H^{n-1}_c(X; G)$$

para qualquer n.

---

[1] Se não fez a alínea anterior suponha que $H_j(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4$ para $j = 0, 1, 2, 3$ e 0 caso contrário.

[2] É possível mostrar que, a menos de equivalência de homotopia, há exactamente dois complexos celulares simplesmente conexos com esta homologia.