Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º Teste de Topologia Algébrica

28 de Abril de 2008

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Seja X o espaço que se obtém de $D^3 \subset \mathbb{R}^3$ retirando os três semieixos não negativos. Seja

$$Y = X \coprod_{S^1} S^1 \times S^1$$

o espaço que se obtém identificando a diagonal $S^1 \times S^1$ com uma circunferência mergulhada em $S^2 \subset D^3$ que separa os pontos $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ do ponto $(0,0,1)$.

Dê uma apresentação para $\pi_1(Y)$.

2. Seja X um espaço conexo por arcos, localmente conexo por arcos e simplesmente conexo e $f : X \to X$ um homeomorfismo. Seja Y o toro da aplicação f, ou seja, o espaço quociente de $X \times [0,1]$ pela relação de equivalência gerada por $(x,1) \sim (f(x),0)$.

(a) Mostre que $X \times \mathbb{R}$ é o espaço total do revestimento universal de Y e descreva a acção do grupo de transformações de revestimento.

(b) Determine todos os revestimentos conexos de Y.

3. Enuncie o Teorema de excisão para a homologia singular.

4. Seja X um espaço topológico e Y o espaço que se obtém de X colando uma célula de dimensão $n \geq 2$ por uma aplicação contínua $f\colon S^{n-1} \to X$.

(a) Mostre que existe uma sucessão exacta longa em homologia

$$\cdots H_k(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} H_k(X) \xrightarrow{i_*} H_k(Y) \to H_{k-1}(S^{n-1}) \to \cdots$$

onde $i\colon X \to Y$ designa a inclusão. **Sugestão:** Use a sucessão de Mayer-Vietoris.

(b) Use a sucessão exacta da alínea anterior para calcular a homologia do espaço que se obtém colando uma célula de dimensão n à esfera S^{n-1} por uma aplicação de grau $l \in \mathbb{Z}$.

Resolva uma das seguintes perguntas:

5. Seja G um grupo topológico conexo por arcos, localmente conexo por arcos e semilocalmente simplesmente conexo. Seja $\pi\colon H \to G$ o revestimento universal.

(a) Mostre que H admite uma estrutura de grupo topológico para a qual π é um homomorfismo e que esta é única a menos de isomorfismo.

(b) Mostre que $\ker \pi$ é um subgrupo central de H e conclua que $\pi_1(G)$ é abeliano. **Sugestão:** Considere a acção por conjugação de H em $\ker \pi$.

6. Seja $p\colon E \to X$ um revestimento com um número finito N de folhas.

(a) Mostre que existe uma aplicação em homologia

$$\tau\colon H_k(X) \to H_k(E)$$

tal que $p_*\tau$ é multiplicação por N. **Sugestão:** Considere cadeias pequenas para uma cobertura adequada de X.

(b) Sendo $E = S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ e X o quociente de E pela acção diagonal das raízes de indíce l de 1, o que pode dizer sobre $H_k(X)$?

7. Mostre que qualquer aplicação $S^2 \to S^1 \times S^1$ é nul-homotópica mas que existem infinitas aplicações $f\colon S^1 \times S^1 \to S^2$ não homotópicas duas a duas.