Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º Teste de Topologia Algébrica

de Julho de 2008

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Seja X o espaço que se obtém de $S^2 \times S^3$ colando uma célula de dimensão 3 pela aplicação

$$S^2 \xrightarrow{6} S^2 \subset X$$

(onde 6 designa uma aplicação de grau 6).

(a) Calcule a homologia de X com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/p$ para todo o primo p.

(b) Mostre[1] que qualquer aplicação $f\colon X \to X$ homotópica à identidade tem um ponto fixo.

(c) Calcule o anel de cohomologia de X com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{Z}/p$ para todos os primos p.

(d) Existe alguma variedade compacta com o mesmo tipo de homotopia que X? Justifique. Se X for homotopicamente equivalente a uma variedade M, qual é a menor dimensão que M pode ter?

Resolva duas das seguintes perguntas.

2. Mostre que os espaços $\mathbb{C}P^3$ e $S^2 \times S^4$ não têm o mesmo tipo de homotopia.

3. Seja M uma variedade compacta orientável de dimensão $2n$ e $f\colon M \to \mathbb{C}P^n$ uma aplicação de grau diferente de 0. Mostre que $H_2(M)$ contém uma cópia de $\mathbb{Z}$ e que o homomorfismo $f_*\colon H_2(M) \to H_2(\mathbb{C}P^n)$ não pode ser trivial.

4. Seja X um espaço tal que $\widetilde{H}^*(X;\mathbb{Q}) = \widetilde{H}^*(X;\mathbb{Z}/p) = 0$ para todo o primo p. Mostre que $\widetilde{H}_*(X) = 0$ e conclua que todos os grupos de homologia e cohomologia singulares reduzidos de X se anulam.

5. Seja X um espaço localmente compacto e Hausdorff, e X^+ a sua compactificação de Alexandroff (que se obtém adicionando um ponto ∞ a X). Mostre que se ∞ tem uma vizinhança em X^+ que é um cone sobre o ponto ∞, então a aplicação canónica

$$H^n_c(X;G) \to H^n(X^+,\infty;G)$$

(que deve definir) é um isomorfismo. Que aplicação é esta se $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$?

---

[1] Pode assumir que X é homotopicamente equivalente a um complexo simplicial finito.