Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Teste 2 (recuperação) de Topologia Algébrica

8 de Julho de 2008

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Seja X o espaço que se obtém de $\mathbb{R}P^3 \times S^2$ colando a S^2 uma célula de dimensão 3 por uma aplicação de grau 12.

(a) Determine a homologia de X com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/n$ para todo o natural n.

(b) Calcule o anel de cohomologia de X com coeficientes em $\mathbb{Z}/2$.

(c) Mostre que X não é homotopicamente equivalente a uma variedade compacta.

(d) Mostre que X não é homeomorfo a uma variedade (Sugestão: Considere grupos de homologia locais).

Resolva duas das seguintes perguntas.

2. Mostre que uma variedade M de dimensão $>= 2$ é orientável sse $M \setminus p$ é orientável onde p designa um ponto de M.

3. Determine o homomorfismo induzido em homologia pela aplicação $f\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ definida pela expressão $f([z_0 : \cdots : z_n]) = [z_0^d : \cdots : z_n^d])$ onde d é um natural (Sugestão: comece por resolver o caso $n = 1$.)

4. Mostre que se X e Y são complexos celulares finitos e $H^*(X)$ e $H^*(Y)$ não contêm elementos de ordem p então o mesmo é verdade de $X \times Y$.

5. Seja M uma variedade compacta orientável de dimensão $2n$ tal que $\dim H_n(M;\mathbb{Q}) = 1$. Seja G um grupo topológico conexo por arcos que age em M. Mostre que para todo o $g \in G$ o homeomorfismo $m \mapsto g \cdot m$ tem um ponto fixo.