Topologia Algébrica

Outono de 1999

Série de problemas 2 (19 de Outubro).

1. Mostre que as classes de homotopia livres (isto é, que não preservam necessáriamente o ponto de base) de aplicações de $(S^1, 1)$ em (X, x_0) estão em correspondência biunívoca com as classes de conjugação no grupo $\pi_1(X, x_0)$.
2. Mostre que um espaço é simplesmente conexo sse toda a aplicação de S^1 em X se pode prolongar a uma aplicação de D^2 em X onde
$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$
3. Mostre que se (X, x_0) e (Y, y_0) são espaços pontuados então para todo o $n \geq 0$,
$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$$
4. Seja (X, e) um espaço pontuado. Diz-se que X é um H-**espaço** (ou um espaço de Hopf) se existe uma aplicação
$$\mu : X \times X \longrightarrow X$$
de espaços pontuados (isto é $\mu(e, e) = e$) tal que $x \mapsto \mu(x, e)$ e $x \mapsto \mu(e, x)$ são homotópicas á identidade de X. Por exemplo, isto é o caso se X é um grupo topológico ou um espaço de lacetes ΩY.
   (a) Considere a operação induzida no conjunto
   $$[\,([0, 1], \{0, 1\}), (X, e)\,]$$
   dada por $[\alpha] \circ [\beta] := [\mu(\alpha, \beta)]$. Mostre que
   $$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha] * [\beta]$$
   Sugestão: $[\alpha] = [\alpha * e]$ *e* $[\beta] = [e * \beta]$
   (b) Mostre que $\pi_1(X, e)$ é abeliano.
   Sugestão: $[e * \alpha] = [\alpha * e]$
   (c) Conclua que para qualquer (Y, y_0) e $n \geq 2$, $\pi_n(Y, y_0)$ é um grupo abeliano.