GRUPOS DE HOMOTOPIA DE ORDEM SUPERIOR

GUSTAVO GRANJA

Os grupos de homotopia de ordem superior são invariantes de homotopia de espaços topológicos. Definem-se de forma análoga ao grupo fundamental. Aliás, como veremos em breve, podem-se definir a partir do grupo fundamental.

Estes invariantes são extremamente importantes e contêm uma grande quantidade de informação sobre o espaço topológico em questão. Infelizmente, são extremamente difíceis de calcular. Os únicos espaços topológicos de dimensão finita para os quais todos os grupos de homotopia de ordem superior são conhecidos são os espaços para os quais todos eles se anulam. Não deixam por isso de desempenhar um papel fundamental em topologia algébrica e muitos dos resultados mais importantes da Topologia Algébrica têm como base o cálculo de grupos de homotopia de espaços particulares.

1. A fibração dos caminhos

Vamos agora introduzir o que em topologia algébrica tem o papel análogo a um fibrado principal em geometria.

Definição 1.1. *Seja (X, x) um espaço pontuado. O* ***espaço dos caminhos*** *em X baseados em x é o espaço*

$$P_xX = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_*}(([0,1], 0), (X, x))$$

com a topologia compacta-aberta. A aplicação de ***avaliação*** *é a aplicação*

$$\mathrm{ev} : P_xX \longrightarrow X$$

definida por $\mathrm{ev}(\alpha) = \alpha(1)$. Claramente ev é uma aplicação contínua.

O ***espaço dos lacetes*** *em X baseados em x é a fibra da aplicação de avaliação sobre o ponto de base x, isto é, o subespaço de P_xX*

$$\Omega X = \{\alpha \in P_xX : \alpha(1) = x\}$$

Ao triplo (P_xX, ev, X) chama-se a ***fibração dos caminhos*** *do espaço pontuado X.*

Nota 1.2. Apesar de se omitir o ponto de base da notação utilizada para o espaço dos lacetes, subentende-se sempre que o espaço X é pontuado e que os lacetes estão baseados no ponto de base.

Dada um morfismo de espaços pontuados $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ existe uma aplicação natural

$$Pf : P_xX \longrightarrow P_yY$$

definida por $Pf(\alpha) = f \circ \alpha$. É fácil verificar que esta aplicação é contínua e que aplica ΩX em ΩY. Escreve-se Ωf para a restrição de Pf a Ωf. O espaço P_xX tem um ponto de base natural: o caminho constante igual a x que denotamos ainda por x. Este ponto de base pertence a ΩX e é claro que as aplicações Pf e Ωf definidas acima são aplicações de espaços pontuados. A demonstração da proposição seguinte é um exercício.

Proposição 1.3. *Com as definições anteriores, P e Ω são endofunctores da categoria $\mathcal{T}op_*$.*

Date: December 6, 1999.

Se $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ é uma homotopia entre f e g então podemos definir $K : PX \times [0,1] \longrightarrow PY$ por

$$K(\alpha, t) = (s \mapsto H(\alpha(s), t))$$

que é claramente uma homotopia entre Pf e Pg. Assim, temos o seguinte resultado

Proposição 1.4. *P e Ω determinam endofunctores da categoria $\mathcal{H}o_*$.*

Exercício 1.5. Mostre que para qualquer espaço pontuado (X, x), o espaço $P_x X$ é contráctil.

2. Definição dos grupos de homotopia

No espaço dos lacetes há uma "multiplicação" natural dada por composição de caminhos

$$\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$$

Isto é, $\mu(\alpha, \beta) = \gamma$ com

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Note-se que μ é uma aplicação de espaços pontuados (ou seja $\mu(x, x) = x$). ΩX com a multiplicação μ é o protótipo de um grupo na categoria de homotopia. Seja $\iota : \Omega X \longrightarrow \Omega X$ a aplicação definida por $\iota(\alpha) = \beta$ com $\beta(t) = \alpha(1-t)$.

Proposição 2.1. *Seja X um espaço pontuado. A aplicação $\Omega X \longrightarrow \Omega X$ constante igual ao lacete constante x designa-se ainda por x. Então*

(a) $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}) \sim \mu(\mathrm{id} \times \mu) : \Omega X \times \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$
(b) $\mu \circ (\mathrm{id} \times x) \sim \mu \circ (x \times \mathrm{id}) \sim \mathrm{id} : \Omega X \longrightarrow \Omega X$
(c) $\mu \circ (\mathrm{id} \times \iota) \sim x \sim \mu \circ (\iota \times \mathrm{id}) : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$

Proof. Demonstração da primeira parte de (c): Uma homotopia entre $\mu \circ (\mathrm{id} \times \iota)$ e x é dada por $H : \Omega X \times [0,1] \longrightarrow \Omega X$ definida por $H(\alpha, s) = \beta_s$ com

$$\beta_s(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \alpha(1-s) & \text{se } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ \iota(\alpha)(2t-1) = \alpha(2-2t) & \text{se } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

A demonstração dos restantes pontos é semelhante e é deixada como exercício. □

A proposição anterior diz que a multiplicação μ é associativa, tem x como identidade e $\iota(\alpha)$ como inverso de α a menos de homotopia. Isto é, ΩX é um *objecto grupo* na categoria $\mathcal{H}o$ (e também na categoria $\mathcal{H}o_*$). Isto implica que dado um espaço Z, o conjunto das classes de homotopia

$$[Z, \Omega X]$$

tem uma estrutura natural de grupo induzida por μ. O mesmo é verdade se considerarmos um espaço pontuado e o conjunto das classes de homotopia baseadas. Em particular podemos tomar $Z = S^0 = \{-1, 1\}$ e um dos pontos de S^0 como ponto de base. Deve ser claro que para qualquer espaço pontuado Y, o conjunto das classes de homotopia baseadas $[S^0, Y]$ se identifica naturalmente com o conjunto das componentes conexas por arcos de Y. Recordamos ainda o seguinte resultado de topologia geral (ver por exemplo [Du, pág. 261] ou qualquer outro livro de topologia geral)

Teorema 2.2. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos e considere-se a topologia compacta-aberta em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(Y, Z)$. Seja*

$$Ad : \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(Y, Z))$$

a aplicação definida por $Ad(f)(x) = (y \mapsto f(x, y))$. Então Ad está bem definida e se Y é localmente compacto, Ad é uma bijecção.

Tendo isto em conta temos o seguinte resultado [1]

[1] O sinal = denota, como habitualmente, equivalência natural.

Proposição 2.3. $\pi_1(X) = \pi_0(\Omega X)$

Proof. Como $[0,1]$ é compacto, pelo Teorema 2.2, a aplicação

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}([0,1], \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}([0,1], X)) \xrightarrow{Ad^{-1}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}([0,1] \times [0,1], X)$$

definida por $Ad^{-1}(\alpha)(s,t) = \alpha(s)(t)$ é uma bijecção. Claramente esta aplicação restringe-se a uma bijecção entre caminhos em ΩX e homotopias baseadas entre lacetes em X. Esta bijecção é claramente natural. □

A proposição anterior sugere que consideremos $\pi_1(\Omega X, x)$. Este será um novo invariante de homotopia de X pela Proposição 1.4. Análogamente, podemos considerar $\pi_1(\Omega^2 X, x)$ (onde $\Omega^2 X = \Omega(\Omega X)$), etc. Recordamos que $\Omega^2 X$ tem como ponto de base o lacete constante igual ao ponto de base $x \in \Omega X$. O ponto de base é ainda designado por x e mais geralmente, o ponto de base de $\Omega^n X$ é designado por x.

Definição 2.4. *Para $n \geq 1$, o n-ésimo **grupo de homotopia** do espaço pontuado (X,x) define-se por $\pi_n(X,x) = \pi_1(\Omega^{n-1}X, x)$*

O seguinte resultado é uma consequência imediata da Proposição 1.4 e do facto de π_1 ser um functor de $\mathcal{H}o_*$ em $\mathcal{G}roup$.

Proposição 2.5. *Para cada $n \geq 1$, existe um functor $\pi_n : \mathcal{H}o_* \longrightarrow \mathcal{G}roup$ que associa a cada $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T}op_*)$ o grupo $\pi_n(X,x)$.*

Para a demonstração da seguinte propriedade fundamental dos grupos de homotopia, ver o exercício 4 da série de problemas 2.

Proposição 2.6. *Para cada $n \geq 2$, $\pi_n(X,x)$ é um grupo abeliano.*

3. Interpretação geométrica dos grupos de homotopia

A definição que escolhemos para os grupos de homotopia de ordem superior torna clara a relação com o grupo fundamental assim como o facto de estes grupos definirem functores a partir da categoria de homotopia. No entanto é útil ter também uma interpretação concreta dos grupos de homotopia.

Iterando a bijecção natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}([0,1], X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(A \times [0,1], X)$$

dada pelo Teorema 2.2 obtemos, para cada $n \geq 1$ uma bijecção natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}([0,1]^n, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}([0,1], \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}([0,1], \ldots, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}([0,1], X) \ldots)) \tag{3.1}$$

$\Omega^n(X)$ é por definição um subespaço do termo direito da equação anterior, e mediante esta bijecção identifica-se com o subespaço

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}ar\mathcal{T}op}(([0,1]^n, \partial[0,1]^n), (X,x)) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}([0,1]^n, X)$$

(note por exemplo que o ponto de base em $\Omega^{n-1}X$ corresponde à aplicação constante $x : [0,1]^{n-1} \longrightarrow X$). Uma vez que o espaço quociente $[0,1]^n/\partial[0,1]^n$ é homeomorfo a S^n, a propriedade universal da topologia quociente dá-nos ainda uma equivalência natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}ar\mathcal{T}op}(([0,1]^n, \partial[0,1]^n), (X,x)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op_*}((S^n, p), (X,x))$$

onde p designa um ponto qualquer[2] de S^n. Assim podemos pensar em representantes de elementos de $\pi_n(X,x)$ como aplicações contínuas de um cubo n-dimensional em X que enviam a fronteira para o ponto de base, ou equivalentemente, como aplicações $S^n \longrightarrow X$ que enviam um ponto $p \in S^n$ fixado para o ponto de base $x \in X$.

[2] Se $\phi : [0,1]^n/\partial[0,1]^n \longrightarrow S^n$ é o homeomorfismo escolhido, p designa a imagem por ϕ da classe de qualquer ponto em $\partial[0,1]^n$.

Mais ainda é verdade: uma nova aplicação do Teorema 2.2 diz-nos que dar uma homotopia baseada entre lacetes em $\Omega^{n-1}X$ é a mesma coisa que dar uma homotopia relativa entre as aplicações correspondentes $([0,1]^n, \partial[0,1]^n) \longrightarrow (X,x)$ e uma nova aplicação da propriedade universal da topologia quociente diz-nos que isto é o mesmo que dar uma homotopia baseada entre as aplicações correspondentes $(S^n,p) \longrightarrow (X,x)$. Assim temos, equivalências naturais de functores com valores na categoria dos conjuntos

$$\pi_n(X,x) = [([0,1]^n, \partial[0,1]^n),(X,x)] = [(S^n,p),(X,x)]$$

Um pouco de reflexão mostra que estas equivalências naturais são válidas para todo o $n \geq 0$.

Resta-nos interpretar a multiplicação no grupo $\pi_n(X,x)$ em termos das duas definições equivalentes que acabamos de dar. Sejam $\alpha, \beta : [0,1]^n \longrightarrow X$ dois representantes (mediante a identificação acima) de elementos de $\pi_n(X,x)$ então, por definição da multiplicação em $\pi_n(X,x)$ e (3.1) temos que um representante de $[\alpha]+[\beta] \in \pi_n(X,x)$ é dado por

$$\gamma(t_1,\ldots,t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1,t_2,\ldots,t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1-1,t_2,\ldots,t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

Note-se que $\gamma(\frac{1}{2},t_2,\ldots,t_n) = x$. Podemos encarar este produto do seguinte modo (um pouco complicado mas que irá dar jeito daqui a pouco): Consideremos o diagrama de pushout

$$\begin{tikzcd} {[0,1]^{n-1}} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & {[0,1]^n_1} \\ {[0,1]^n_2} \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

onde $[0,1]^n_i$ designa uma cópia de $[0,1]^n$ e onde $i_1(t_1,\ldots,t_{n_1}) = (1,t_1,\ldots,t_{n-1})$ e $i_2(t_1,\ldots,t_{n_1}) = (0,t_1,\ldots,t_{n-1})$. Então existe um homeomorfismo natural

$$\pi : [0,1]^n \xrightarrow{\simeq} [0,1]^n \amalg_{[0,1]^{n-1}} [0,1]^n$$

definido por

$$\pi(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{cases} [(2t_1,t_2,\ldots,t_n)]_1 & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ [(2t_1-1,t_2,\ldots,t_n)]_2 & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

onde $[-]_i$ denota a classe no pushout representada pelo ponto $-$ em $[0,1]^n_i$. Note ainda que

$$\pi(\frac{1}{2},t_2,\ldots,t_n) = [i_1(t_2,\ldots,t_n)] = [i_2(t_2,\ldots,t_n)] \in [0,1]^n \amalg_{[0,1]^{n-1}} [0,1]^n$$

Então dados, $\alpha, \beta : [0,1]^n \longrightarrow X$ tais que $\alpha(\partial[0,1]^n) = \beta(\partial[0,1]^n) = x$ obtemos uma seta do diagrama (3.3) em X

$$\begin{tikzcd} {[0,1]^{n-1}} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & {[0,1]^n} \arrow[d, "\alpha"] \\ {[0,1]^n} \arrow[r, "\beta"] & X \end{tikzcd}$$

e portanto uma aplicação

$$\alpha \amalg \beta : [0,1]^n \amalg_{[0,1]^{n-1}} [0,1]^n \longrightarrow X$$

É agora imediato verificar que o representante de $[\alpha]+[\beta] \in \pi_n(X)$ descrito em (3.2) é igual a

$$[0,1]^n \xrightarrow{\pi} [0,1]^n \amalg_{[0,1]^{n-1}} [0,1]^n \xrightarrow{\alpha \amalg \beta} X$$

Finalmente, fixe-se $\phi : [0,1]^n \longrightarrow S^n$ uma aplicação tal que $\phi(\partial[0,1]^n) = p$ e que induz um homeomorfismo $[0,1]^n/\partial[0,1]^n \xrightarrow{\sim} S^n$. Consideremos a seta a partir do diagrama (3.3)

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^{n-1}} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & {[0,1]^n} \arrow[d, "\phi_1"] \\
{[0,1]^n} \arrow[r, "\phi_2"] & S_1^n \vee S_2^n
\end{tikzcd}$$

onde S_i^n designa uma cópia de S^n e ϕ_i designa $[0,1]^n \xrightarrow{\phi} S_i^n \hookrightarrow S_1^n \vee S_2^n$. A propriedade universal do pushout produz uma aplicação

$$[0,1]^n \amalg_{[0,1]^{n-1}} [0,1]^n \overset{\phi_1 \amalg \phi_2}{\longrightarrow} S_1^n \vee S_2^n$$

Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^n} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"] & {[0,1]^n \amalg [0,1]^n} \arrow[d, "\phi_1 \amalg \phi_2"] \\
S^n \arrow[r, "\Delta"] & S^n \vee S^n
\end{tikzcd}$$

onde $\Delta := (\phi_1 \amalg \phi_2) \circ \pi \circ \phi^{-1}$. Então se $\alpha, \beta : (S^n, p) \longrightarrow (X, x)$ representam elementos de $\pi_n(X, x)$, o diagrama acima mostra que

$$S^n \xrightarrow{\Delta} S^n \vee S^n \xrightarrow{\alpha \vee \beta} X$$

representa $[\alpha] + [\beta] \in \pi_n(X, x)$. Geométricamente, Δ é equivalente ao colapso de um equador de S^n, isto é, de $\phi(\{\frac{1}{2}\} \times [0,1] \times \ldots \times [0,1]) \subset S^n$, o que dá a interpretação geométrica da soma em $\pi_n(X, x)$ quando este é identificado com $[(S^n, p), (X, x)]$.

References

[Du] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
[GH] M. Greenberg e J. Harper, *Algebraic Topology: a first course*, Addison-Wesley, 1981.
[Hu] S. Hu, *Homotopy Theory*, Pure and Applied Math, Vol. 8, Academic Press, 1959.
[Sp] E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.