Teoria da Homotopia

Ficha 1

A entregar até 17/03/2005

1. Mostre que as cofibrações são estáveis por pushout e composição e que as fibrações (ou fibrações de Serre) são estáveis por pullback e composição.
2. Se A é um espaço pontuado,
$$PA = \{\gamma\colon [0,1] \to A\colon \gamma(0) = *\}$$
chama-se o espaço dos caminhos baseados (com a topologia compacta-aberta), e
$$\Omega A = \{\gamma \in PA\colon \gamma(1) = *\}$$
chama-se o espaço dos laços baseados.

    Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação e $y_0 \in Y$. A *fibra de homotopia* de f sobre y_0 é o espaço
$$F_f = \{(x,\gamma) \in X \times PY\colon f(x) = \gamma(1)\}$$
juntamente com a projecção $\pi\colon F_f \to X$ na primeira coordenada. Dito de outra forma, a fibra de homotopia é o pullback por f da aplicação de avaliação em 1, $p : PY \to Y$.
    (a) Mostre que π é uma fibração.
    (b) Mostre que $\pi_n(\Omega X) = \pi_{n+1}(X)$.
    (c) Mostre que se tem uma sucessão exacta longa
$$\cdots \pi_n(F_f) \to \pi_n(X) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y) \to \pi_{n-1}(F_f) \to \cdots$$
    (d) Mostre que se $i\colon A \to X$ é a inclusão de um subespaço então $\pi_{n-1}(F_i) = \pi_n(X,A)$.
    (e) Mostre que se f é homotópica a g então F_f é homotopicamente equivalente a F_g.
3. Sejam X e Y espaços pontuados. Mostre que para $n \geq 2$ se tem
$$\pi_n(X \vee Y) \simeq \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y).$$
4. Se $\gamma : [0,1] \to X$ é um caminho entre x_0 e x_1, escrevemos $\gamma \cdot \alpha$ para a acção de γ em $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$.
    (a) Sendo h o homomorfismo de Hurewicz, mostre que $h(\gamma \cdot \alpha) = h(\alpha)$.
    (b) Seja $(X,*)$ um espaço pontuado. Seja $H\colon X \times [0,1] \to Y$ uma homotopia entre f e g, $\gamma(t) = H(*,t)$ e $y_0 = \gamma(0)$, $y_1 = \gamma(1)$. Mostre que dado $\alpha \in \pi_n(X,*)$ temos
$$g_*(\alpha) = \gamma \cdot f_*(\alpha) \in \pi_n(Y, y_1).$$
    (c) Seja $p : \tilde{X} \to X$ um revestimento regular, e $\gamma \in \pi_1(X,*)$. Seja $x_0 \in p^{-1}(*)$, x_1 o ponto final do levantamento $\tilde{\gamma}$ a partir de x_0, e T uma transformação de revestimento que envia x_0 em x_1. Escreva uma expressão em termos de $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\alpha}$ e T para o levantamento de $\gamma \cdot \alpha \in \pi_n(X,*)$ a $\pi_n(\tilde{X}, x_0)$.
    (d) Um espaço X diz-se *simples* se o grupo fundamental de X age trivialmente em $\pi_n(X)$. Mostre que $\mathbb{R}P^n$ é simples sse n é ímpar.

5. Um espaço pontuado $(X, *)$ diz-se um *H-espaço* se existe uma aplicação
$$\mu\colon X \times X \to X$$
tal que o diagrama
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] & X \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
(onde i_1, i_2 são as inclusões de X determinadas pelo ponto de base) comuta a menos de homotopia. Dualmente, uma estrutura de *co-H-espaço* em X consiste numa co-multiplicação
$$X \xrightarrow{\nabla} X \vee X$$
tal que o diagrama
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\nabla"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ X & X \vee X \arrow[l, "c_1"'] \arrow[r, "c_2"] & X \end{tikzcd}$$
(onde c_1, c_2 são as aplicações que colapsam cada um dos somandos) comuta a menos de homotopia.
   (a) Mostre que ΣX (por exemplo uma esfera) tem uma estrutura natural de co-H-espaço e dualmente que o espaço de laços baseados ΩX tem uma estrutura natural de H-espaço.
   (b) Suponha que $X \vee X \subset X \times X$ é uma cofibração (pode mostrar-se que para tal basta que $* \subset X$ seja uma cofibração). Mostre que se X é um H-espaço existe $\bar{\mu}$ homotópica a μ tal que o diagrama acima comuta estritamente.
   (c) Se X é um H-espaço, μ define uma multiplicação no conjunto $[A, X]$ das classes de homotopia a partir de um espaço A qualquer. Dualmente se A é um co-H-espaço então dispomos de uma multiplicação natural em $[A, X]$ para qualquer espaço X. Mostre que se A é um co-H-espaço *e* X é um H-espaço estas duas multiplicações coincidem[1] e que neste caso a multiplicação é comutativa.
   (d) Mostre que um H-espaço é simples.
   (e) Se A é um co-H-espaço define-se o *homomorfismo de Hurewicz generalizado*
$$h\colon [A, X] \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_*(A), H_*(X))$$
   pela fórmula
$$h([f]) = f_*$$
   Mostre que h é de facto um homomorfismo.
   (f) **Opcional** Use o lema de Yoneda para mostrar que X é um H-espaço sse existe uma multiplicação natural (em A) nos conjuntos $[A, X]$ (analogamente para co-H-espaços).

[1] Em particular, se X é um H-espaço podemos calcular a soma em $\pi_n(X)$ multiplicando ponto a ponto.