Teoria da Homotopia

Ficha 2

A entregar até 31/03/2006

1. **Hatcher 4.1.12.** Mostre que um complexo celular n-conexo de dimensão $\leq n$ é contráctil.
2. Mostre directamente que $\pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) \to \pi_n(\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1})$ é um epimorfismo mas não um isomorfismo (conforme predito pelo Teorema de Excisão de Homotopia).
3. **Hatcher 4.2.30.** Seja $F \to E \to B$ uma fibração de Serre tal que a inclusão $F \to E$ é nul-homotópica. Mostre que a sucessão exacta longa da fibração se cinde de forma que
$$\pi_n B \simeq \pi_n(E) \oplus \pi_{n-1}(F).$$
Em particular, as fibrações de Hopf dizem-nos que
$$\pi_k(S^4) \simeq \pi_k(S^7) \oplus \pi_{k-1}(S^3) \quad \text{e} \quad \pi_k(S^8) \simeq \pi_k(S^{15}) \oplus \pi_{k-1}(S^7).$$
4. **Hatcher 4.2.31.** Mostre que se $S^k \to S^m \to S^n$ é um fibrado então $k = n-1$ e $m = 2n-1$. (Vejam também o problema 4.2.32 !)
5. Seja B um complexo simplicial finito e $p : E \to B$ um fibrado [1] com fibra F.
   (a) Mostre que se B tem dimensão $\leq n+1$ e F é n-conexa, então p admite uma secção.
   (b) Mostre que se F é fracamente contráctil, então o espaço das secções é fracamente contráctil.
6. Recorde que dois espaços têm o mesmo tipo de homotopia fraco se existe um zig-zag de equivalências fracas entre eles.
   (a) **Hatcher 4.1.10.** Mostre que a "circunferência" construída à custa da função $\sin \frac{1}{x}$, é fracamente contráctil mas não é contráctil.
   (b) Dê um exemplo de dois espaços que têm o mesmo tipo de homotopia fraco mas tais que não existe uma equivalência fraca entre eles. **Sugestão:** Considere subespaços de $\mathbb{R}$ de dimensão 0.
7. **Hatcher 4.1.11.** Seja X um complexo celular que é uma união[2] de subcomplexos celulares $X_k \subset X_{k+1}$ de tal forma que a inclusão $X_k \to X_{k+1}$ é nul-homotópica. Mostre que X é contráctil.
8. **Hatcher 4.1.20.** Mostre que se X é um complexo celular finito e $\pi_k(Y)$ é finito para cada $k \leq \dim X$, então $[X, Y]$ é finito.

[1] Na realidade basta que B seja um complexo celular e p uma fibração de Serre mas a demonstração é bastante mais fácil com as hipóteses do enunciado.

[2] Por exemplo S^∞.