Teoria da Homotopia

Ficha 3 (A entregar até 21/04/2006)

1. **Hatcher 4.2.5.** Seja $f : S^2 \vee S^2 \to S^2 \vee S^2$ uma aplicação que em homologia é determinada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, sendo a identidade no primeiro somando. Seja X o *toro da aplicação* f, isto é, o espaço
$$(S^2 \vee S^2) \times [0,1]/x \sim f(x).$$
Seja $A = S^1 \times S^2 \subset X$ o toro da restrição de f ao primeiro somando. Mostre que $\pi_1(A)$ age trivialmente em $\pi_2(A)$ e $\pi_2(X, A)$ mas não em $\pi_2(X)$.
2. (a) **Hatcher 4.2.8.** Seja X um complexo celular *acíclico*, isto é, tal que $\overline{H}_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ para todo o k. Mostre que ΣX é contráctil.
   (b) **Hatcher 4.2.9.** Mostre que uma aplicação entre complexos celulares simplesmente conexos é uma equivalência de homotopia se o seu cone (ou cofibra de homotopia) é contráctil. Dê um exemplo como a afirmação falha sem a hipótese de 1-conexidade.
3. **Hatcher 4.2.12.** Mostre que se X e Y são complexos celulares, uma aplicação $f : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia desde que induza um isomorfismo em π_1 e um seu levantamento $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ induza um isomorfismo em homologia nos revestimentos universais.
4. **Hatcher 4.2.15.** Mostre que uma variedade fechada de dimensão 3 simplesmente conexa é homotópicamente equivalente a S^3.
5. **Hatcher 4.2.18** Mostre que se X e Y são complexos celulares simplesmente conexos e $\overline{H}_i(X)$ e $\overline{H}_j(Y)$ são finitos e com ordens primas entre si para todos os i, j então a inclusão
$$X \vee Y \to X \times Y$$
é uma equivalência de homotopia e $X \wedge Y$ é contráctil.
6. Seja $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ uma aplicação, X o cone de f, $x \in H^n(X;\mathbb{Z})$ e $y \in H^{2n}(X;\mathbb{Z})$ geradores. Define-se o *invariante de Hopf* de f como sendo o inteiro[1] $H(f)$ tal que
$$x^2 = H(f)y.$$
Pela comutatividade graduada do produto cup este invariante é 0 se n é ímpar.
   (a) Calcule o invariante de Hopf das aplicações de Hopf $S^3 \to S^2$, $S^7 \to S^4$ e $S^{15} \to S^8$.
   (b) Mostre que se k é uma aplicação de grau k, então $H(k \circ f) = k^2 H(f)$ e $H(f+g) = H(f) + H(g)$.
   (c) Seja $[\iota_n, \iota_m]\colon S^{n+m-1} \to S^n \vee S^m$ a aplicação de colagem da célula de dimensão $2n$ na decomposição celular standard de $S^n \times S^m$. Define-se o *produto de Whitehead* de dois elementos $\alpha \in \pi_n(X), \beta \in \pi_m(X)$ pela composição
$$[\alpha, \beta] = (\alpha \vee \beta) \circ [\iota_n, \iota_m].$$
   Mostre que para todo o n par existe uma aplicação $S^{2n-1} \to S^n$ com invariante de Hopf 2. Note que pela alínea (b) isto significa que $\pi_{2n-1}S^n$ é infinito para n par. [2]

[1] Com este nível de detalhe só fica definido a menos de sinal correspondente à escolha dos geradores.

[2] É um célebre teorema de J.F. Adams que as únicas aplicações com invariante de Hopf 1 são as da alínea (a). Um teorema de Serre que provaremos mais tarde diz que os únicos grupos de homotopias de esferas infinitos são $\pi_n(S^n)$ e $\pi_{2n-1}(S^n)$ com n par.