Teoria da Homotopia

Ficha 4 (A entregar até 7/05/2006)

1. Mostre que se $p : E \to B$ é uma fibração de Serre e B é conexo por arcos, todas as fibras de p são fracamente equivalentes.
2. Seja $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ uma sucessão de cofibração.
   (a) Mostre que se existe $h\colon C \to B$ tal que $hg \simeq \mathrm{id}_B$, então $C \simeq B \vee \Sigma A$.
   (b) Supondo que X e Y são bem pontuados (logo $X \vee Y \subset X \times Y$ é uma cofibração), mostre que
$$\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y).$$
3. **Hatcher 4.H.3** Mostre que se $E_1 \to B$ e $E_2 \to B$ são fibrações e $f : E_1 \to E_2$ é uma aplicação que preserva as fibras, então f é uma equivalência de homotopia fibrada.
4. Seja X um complexo celular conexo por arcos. Mostre que
$$[X, K(G,1)]_* = \mathrm{Hom}(\pi_1(X), G).$$
   Sugestão: Note que pode supor que as aplicações características das células são pontuadas. Considere as sucessões de cofibração determinadas pelas aplicações de colagem das células.
5. (a) **Hatcher 4.A.2** Mostre que a aplicação
$$[(X, x_0), (Y, y_0)]_* \to \mathrm{Hom}(\pi_n(X, x_0), \pi_n(Y, y_0))$$
   dada pela fórmula $[f] \mapsto f_*$ leva a acção de $\pi_1(Y, y_0)$ na acção de $\pi_1(Y, y_0)$ nos homomorfismos dada por $(\gamma \cdot \phi)(\alpha) = \gamma \cdot \phi(\alpha)$.
   (b) Conclua que
$$[X, K(G,1)]$$
   se identifica com as classes de conjugação de homomorfismos de $\pi_1(X)$ em G. Se G é abeliano, mostre que estas se identificam com $H^1(X; G)$.
6. **Hatcher 4.3.3** Seja X um complexo celular que contém S^1 como um subcomplexo. Mostre que se $S^1 \to X$ induz uma inclusão em homologia com imagem um somando directo, então S^1 é um retrato de X.
7. **Hatcher 4.A.3,4** Sendo $\mathrm{Aut}(X)$ o grupo das equivalências de homotopia $X \to X$, mostre que
   (a) $\mathrm{Aut}(K(G,1)) \simeq \mathrm{Out}(G)$ é o grupo dos automorfismos exteriores de G.
   (b) $\mathrm{Aut}(\vee_{k=1}^m S^n) = \mathrm{GL}(m; \mathbb{Z})$ desde que $n > 1$. E para $n = 1$?
8. Considere a sucessão $F_q \xrightarrow{r} F_p \xrightarrow{q} F_f \xrightarrow{p} X \xrightarrow{f} Y$. Mostre que existem equivalências de homotopia
$$\Omega X \xrightarrow{h} F_q \qquad \Omega Y \xrightarrow{k} F_p$$
   tais que
$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega Y \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ F_q & \xrightarrow{r} & F_p \end{array}$$
   comuta a menos de homotopia.