Teoria da Homotopia

Ficha 5 (A entregar até 20/05/2006)

1. (a) **Hatcher 4.3.8** Mostre que $p : E \to B$ é uma fibração sse existe uma secção da aplicação
$$\pi \colon E^{[0,1]} \to E_p$$
definida por $\pi(\gamma) = (\gamma(0), p\gamma)$. Uma tal secção chama-se uma *aplicação de levantamento*.
   (b) **Hatcher 4.3.9** Mostre que a projecção linear de um 2-simplexo numa das suas arestas é uma fibração mas não um fibrado.
2. (a) Mostre que há um modelo de $K(\mathbb{Z}, n)$ sem células de dimensão $n + 1$. [1]
   (b) **Hatcher 4.3.5** Mostre que $[X, S^n] \simeq H^n(X; \mathbb{Z})$ se X é um complexo celular de dimensão n.
   (c) **Hatcher 4.3.1** Mostre que $[\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{C}P^\infty]$ é o grupo com dois elementos e descreva geometricamente um representante da classe de homotopia não trivial.
   (d) Mostre que $[\mathbb{C}P^k, \mathbb{C}P^n] \simeq \mathbb{Z}$ para $k \leq n$.
   (e) Sabendo que $\pi_4(S^3) \simeq \mathbb{Z}/2$ mostre que $[\mathbb{C}P^{n+1}, \mathbb{C}P^n]$ tem no máximo dois elementos.
3. **Hatcher 4.3.6,7** Mostre que se G é abeliano, $K(G, n)$ dispôe de uma única estrutura de H-espaço
$$\mu \colon K(G, n) \times K(G, n) \to K(G, n)$$
que é comutativa e associativa a menos de homotopia. Mostre ainda que o isomorfismo natural $H^n(X; G) = [X, K(G, n)]$ é um isomorfismo de grupos quando dotamos $[X, K(G, n)]$ da multiplicação determinada por μ.
4. Seja $\underline{E} = \{E_n, \epsilon_n \colon \Sigma E_n \to E_{n+1} \colon n \geq 0\}$ um espectro. Os grupos de homotopia de $\underline{E}$ definem-se para $n \in \mathbb{Z}$ pela fórmula
$$\pi_n(\underline{E}) = \mathrm{colim}_{k\to\infty} \left(\pi_{k+n}(E_k) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{k+n+1}(\Sigma E_k) \xrightarrow{\epsilon_{k*}} \pi_{k+n+1}(E_{k+1}) \to \cdots \right)$$
(note-se que este limite faz sentido para qualquer inteiro n).
   (a) Mostre que se $\{f_n \colon E_n \to F_n\}$ é um morfismo de espectros (com a definição óbvia), as cofibras de homotopia C_{f_n} formam um espectro e temos uma sucessão exacta longa
$$\cdots \to \pi_n(\underline{E}) \to \pi_n(\underline{F}) \to \pi_n(\underline{C}_f) \to \pi_{n-1}(\underline{E}) \to \cdots$$
   (b) Para X um complexo celular, define-se $\underline{E \wedge X} = \{E_n \wedge X, \epsilon_n \wedge \mathrm{id}_X\}$. Mostre que os functores
$$E_n(X) = \pi_n \underline{E \wedge X}$$
definem uma teoria de homologia generalizada nos complexos celulares. Note que se $\underline{E} = \Sigma^\infty S^0 = \{S^n\}$, $E_n(X)$ é o n-ésimo grupo de homotopia estável de X. Mostre que se $\underline{E} = \underline{HG}$ é o espectro de Eilenberg-MacLane associado ao grupo abeliano G esta teoria de homologia é a homologia usual. [2]

---

[1] Consegue utilizar este resultado para ver que $H_{n+1}(K(G, n)) = 0$ quando G é livre de torção?

[2] É um Teorema de Adams que qualquer teoria de homologia tal que $E_*(X) = \mathrm{colim}_\alpha E_*(X_\alpha)$ com $\{X_\alpha\}$ a família dos subcomplexos finitos de X é representada desta forma por um espectro.

5. (a) Mostre que X é um produto de espaços de Eilenberg-MacLane (com grupo fundamental abeliano) sse o homomorfismo de Hurewicz $h\colon \pi_k(X) \to H_k(X)$ é a inclusão de um somando directo para todo o k.
   (b) Mostre que se X é um produto de espaços de Eilenberg-MacLane como na alínea anterior e Y é *dominado* por X (isto é, existem aplicações $j\colon Y \to X$ e $r\colon X \to Y$ com $rj \simeq \mathrm{id}_Y$) então Y é também um produto de espaços de Eilenberg-MacLane.
6. **Hatcher 4.3.21** Mostre que na torre de Postnikov de um H-espaço, todos os espaços são H-espaços e todas as aplicações da torre comutam com a multiplicação a menos de homotopia (isto é são aplicações de H-espaços).
7. **Hatcher 4.3.22** Mostre que uma fibração principal tem o tipo de homotopia fibrado de um produto sse admite uma secção.