Teoria da Homotopia

Ficha 6 (A entregar até 6/6/2006)

1. (a) Seja G um grupo topológico e X um G-espaço com acção à direita livre. Mostre que $X \to X/G$ é um fibrado principal sse a acção admite uma fatia em cada ponto.
   (b) Construa explicitamente uma fatia em cada ponto para a acção de S^1 em S^2 por rotação em torno do eixo que passa nos polos.
2. Considere a cobertura aberta standard $\{U, V\}$ de $\mathbb{C}P^1$ com
$$U = \{[z_1 : 1] \mid z_1 \in \mathbb{C}\} \quad V = \{[1 : z_2] \mid z_2 \in \mathbb{C}\}.$$
Recorde que o grupo dos biholomorfismos de $\mathbb{C}P^1$ é o grupo $PGL(2;\mathbb{C})$ das transformações de Möbius
$$\zeta \mapsto \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \qquad \text{com} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2;\mathbb{C}).$$
onde $\zeta \in \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

   Mostre que o fibrado com grupo estrutural $PGL(2;\mathbb{C})$ e fibra $\mathbb{C}P^1$ determinado pela função de transição
$$g_{UV}(z_1)\zeta = z_1^2\zeta$$
não é isomorfo ao fibrado trivial por meio de um isomorfismo holomorfo, isto é, dado por transformações da forma
$$z \mapsto \left(\zeta \mapsto \frac{a(z)\zeta + b(z)}{c(z)\zeta + d(z)}\right)$$
com a, b, c, d funções holomorfas. Diz-se que o fibrado não é trivial como fibrado holomorfo. Consegue ver que é trivial como fibrado com grupo de estrutura $PGL(2;\mathbb{C})$?[1]

   Nota: Este fibrado é a projectivização do fibrado tangente de $\mathbb{C}P^1$ (exercício!).
3. (a) Justifique que existem fibrados $U(n) \to U(n+1) \to S^{2n+1}$ para todo o $n \geq 1$.
   (b) Mostre que a inclusão natural $U(k) \to U(n)$ é $(2k)$-conexa, e mais geralmente que a inclusão $U(k)/U(m) \to U(n)/U(m)$ é $(2k)$-conexa para $m \leq k \leq n$.
   (c) Calcule $\pi_{2m+1}(U(k)/U(m))$.
   (d) Explique como identificar $U(k)/U(m)$ com o conjunto dos $(k-m)$-referenciais ortonormados
$$\left\{(\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_{k-m}) \in \left(\mathbb{C}^k\right)^m : \|\mathbf{v}_i\| = 1, \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0\right\}$$
   em $\mathbb{C}^k$.
   (e) Dado um fibrado vectorial hermiteano $\xi = \{p : E \to B, U(k), \mathbb{C}^k\}$, em que grupo de cohomologia vive a obstrução primária à existência de m secções linearmente independentes?
   Esta obstrução chama-se a $(k-m+1)$-*ésima classe de Chern* de ξ.
   Nota: Pode assumir que a acção de monodromia nas fibras é trivial quando necessário. Veremos em breve que isto é uma consequência de a base do fibrado universal ser simplesmente conexa.

[1] Em particular o espaço total é difeomorfo a $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$.