Teoria da Homotopia

Ficha 7 (A entregar até 27/6/2006)

1. **Hatcher 4.D.1** Considere o fibrado $\xi = \{p\colon \mathbb{C}P^3 \to \mathbb{H}P^1, \mathbb{C}P^1, SU(2)\}$ e seja η o pullback de ξ por uma aplicação $\mathbb{H}P^1 \to \mathbb{H}P^1$ de grau k. Calcule o anel de cohomologia do espaço total de η.
2. **Hatcher 4.D.3** Use o teorema de Leray-Hirsch para mostrar que
$$H^*(V^{\mathbb{C}}_{n,k};\mathbb{Z}) = \Lambda(x_{2n-2k+1},\ldots,x_{2n-1}).$$
3. **Hatcher 4.D.7** Mostre que se um par de fibrados $(E,E') \to B$ com fibra $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é orientável então a monodromia é trivial.
4. Sendo ξ um fibrado vectorial real e $J\colon \xi \to \xi$ um isomorfismo com $J^2 = -1$. Mostre que ξ admite uma redução do grupo estrutural a $GL(n;\mathbb{C})$.
5. (a) Mostre que o produto tensorial determina uma estrutura de grupo nos conjuntos de classes de isomorfismo de fibrados linha
$$K_{O(1)}(X) \quad \text{e} \quad K_{U(1)}(X).$$
   (b) Mostre que as classes de Stiefel-Whitney e de Chern
$$w_1\colon K_{O(1)}(X) \to H^1(X;\mathbb{Z}/2) \qquad c_1\colon K_{U(1)}(X) \to H^2(X;\mathbb{Z})$$
   são isomorfismos de grupos para estas estruturas de grupo.
   (c) Mostre que em $K_{U(1)}(X)$ as operações de tomar o dual e o conjugado coincidem.
   (d) Mostre que um fibrado linha real ou complexo é trivial sse tem uma secção que nunca se anula.
6. (a) Seja
$$1 \to K \to G \to H \to 1$$
   uma sucessão exacta curta de grupos topológicos (tais que a acção de K em G admite uma fatia). Mostre que
$$BK \to BG \to BH$$
   é uma sucessão de fibração.
   (b) Mostre que $B(G \times H) \simeq BG \times BH$.
   (c) Considere as sucessões exactas
$$1 \to SO(n) \to O(n) \to \mathbb{Z}/2 \to 1.$$
   Admitindo a existência de classes de Stiefel-Whitney satisfazendo os axiomas mostre que a aplicação
$$BO(n) \to BZ/2 = \mathbb{R}P^\infty$$
   classifica a primeira classe de Stiefel-Whitney. Conclua que um fibrado vectorial real é orientável sse a sua primeira classe de Stiefel-Whitney se anula.