Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TOPOLOGIA GERAL E INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTAÇÃO

EXAME DE 28/06/2003.

(2 val.) (1) Enuncie o Teorema de Ascoli.

(3 val.) (2) Dados espaços com a propriedade indicada na primeira coluna da seguinte tabela, diga se a operação indicada na primeira linha preserva essa propriedade.

	Subespaços	Produtos	Imagem por apl. contínua	Subespaços fechados
Hausdorff				
Regular				
Normal				
Compacto				
Conexo				
Metrizável				
Base contável				

(2 val.) (3) Mostre que um espaço normal conexo com mais de um ponto é não contável. *Sugestão: Use o Lema de Urysohn.*

(2 val.) (4) Considere $\mathbb{R}^\omega$ com a métrica uniforme. Mostre que as bolas fechadas de raio positivo não são compactas.

(2 val.) (5) Mostre que um subespaço aberto de um espaço de Baire é um espaço de Baire.

(2 val.) (6) Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ diz-se *própria* se f é fechada e $f^{-1}(y) \subset X$ é compacto para todo o $y \in Y$. Mostre que se Y é localmente compacto e Hausdorff, uma aplicação contínua f é própria sse $f^{-1}(K)$ é compacto para todo o compacto $K \subset Y$.

(2 val.) (7) Seja x um ponto de S^2. Considere o espaço

$$\Omega_x S^2 = \{g : [0,1] \to S^2 : g \text{ é contínua, e } g(0) = g(1) = x\}$$

com a topologia induzida pela topologia compacta-aberta em $C([0,1], S^2)$. Mostre que $\Omega_x S^2$ é conexo.

Volte S. F. F.

(1 val.) (8) Seja X um espaço simplesmente conexo e localmente conexo por arcos. Mostre que toda a aplicação $f : X \to S^1 \times S^1$ é nul-homotópica. *Sugestão: Use o teorema de levantamento.*

(2 val.) (9) Calcule o grupo fundamental do seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \colon (x - 1)^2 + y^2 = 1\}.$$

(10) Seja $p : E \to B$ uma aplicação de revestimento com E conexo por arcos e localmente conexo por arcos. Recorde que uma transformação de revestimento é um homeomorfismo $\phi : E \to E$ tal que $p \circ \phi = p$. Seja $x_0 \in B$.

(1 val.) (a) Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes [1]:

(i) Dados $e_1, e_2 \in p^{-1}(x_0)$, existe ϕ transformação de revestimento tal que $\phi(e_1) = e_2$, [2]

(ii) Dado $\alpha : [0, 1] \to B$ um laço baseado em x_0, e $\beta_1, \beta_2 : [0, 1] \to E$ levantamentos de α, β_1 é um caminho fechado sse β_2 também é.

(1 val.) (b) Esboce um revestimento conexo de $S^1 \vee S^1$ com três folhas tal que as condições da alínea anterior não se verificam.

[1] Quando estas afirmações se verificam, diz-se que o revestimento em causa é regular.

[2] Ou seja, o grupo das transformações de revestimento age transitivamente nas fibras.