Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TOPOLOGIA GERAL E INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTAÇÃO

EXAME DE 18/07/2003.

(2 val) (1) Seja $p : X \to Y$ uma aplicação quociente. Mostre que se Y é conexo e para cada $y \in Y$, o subespaço $p^{-1}(y) \subset X$ é conexo, então X é conexo.

(2 val) (2) Mostre que a imagem de um espaço normal por uma aplicação contínua e fechada é um espaço normal.

(1.5 val) (3) (a) Enuncie o teorema de metrização de Urysohn.
(1.5 val) (b) Mostre que uma variedade topológica é um espaço metrizável.

(2 val) (4) Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções equicontínua e pontualmente limitada. Mostre ou dê um contra-exemplo: (f_n) tem uma subsucessão uniformemente convergente.

(5) Seja (Y, d) um espaço métrico e X um espaço topológico. Dado $f \in C(X, Y)$ e uma função contínua positiva $\delta : X \to \mathbb{R}^+$, define-se

$$B(f, \delta) = \{g \in C(X, Y) \colon d(f(x), g(x)) < \delta(x)\}.$$

(2 val) (a) Mostre que os conjuntos $B(f, \delta)$ formam uma base de topologia (dita a topologia fina em $C(X, Y)$).
(2 val) (b) Mostre que se X é compacto, a topologia fina coincide com a topologia compacta-aberta em $C(X, Y)$.
(2 val) (c) Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma sucessão em $C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ com a topologia fina. Mostre que $f_n \to 0$ sse existe um compacto $K \subset \mathbb{R}$ e N tais que $n > N \Rightarrow f_n(\mathbb{R} \setminus K) = 0$ e $f_n \to 0$ uniformemente em K.

(1.5 val) (6) Seja $n > 2$ e $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Seja $p \in S^n$ e $i : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{p\}$ um homeomorfimo. Mostre que para todo o $q \in \mathbb{R}^n \setminus K$, o homomorfismo

$$i_* : \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus K, q) \to \pi_1(S^n \setminus i(K), i(q))$$

é um isomorfismo de grupos. *Sugestão: Use o teorema de Seifert-Van Kampen.*

(1.5 val) (7) Mostre que qualquer aplicação contínua $\mathbb{R}P^n \to S^1$ com $n > 1$ é nul-homotópica.

Volte S. F. F.

(2 val) (8) Recorde que um espaço normal X se diz um *retrato absoluto* se dado um espaço normal Y e um subespaço fechado $A \subset Y$ homeomorfo a X, existe uma retracção $r : Y \to A$. [1] Mostre que se X é um retrato absoluto e $X \times [0,1]$ é normal [2], então X é contráctil.

Sugestão: Considere o cone em X, *definido como o espaço quociente* $X \times [0,1]/\sim$ *onde* $\sim$ *é a relação de equivalência gerada por* $(x,1) \sim (y,1)$ *para* $x, y \in X$.

[1]Este conceito tem interesse porque os retratos absolutos são precisamente os espaços para os quais é válido o enunciado do teorema da extensão de Tietze conforme vimos numa aula prática.

[2]Diz-se nesse caso que X é binormal.