Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

TOPOLOGIA GERAL E INTRODUÇÃO À ANÁLISE FUNCIONAL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTAÇÃO

EXAME PARA PRATICAR

(1) Considere o quadrado $[0,1] \times [0,1]$ com a topologia da ordem lexicográfica.

(2 val.) (a) Determine o interior, o fecho e o derivado do subconjunto $\{(x, \frac{1}{2}) : x \in [0,1]\}$.

(1 val.) (b) Se $A \subset [0,1] \times [0,1]$ é um subconjunto fechado, é ou não verdade que uma função contínua $f : A \to \mathbb{R}$ pode ser prolongada por continuidade a $[0,1] \times [0,1]$? Justifique.

(1.5 val.) (c) Quais dos quatro axiomas de numerabilidade são verificados por $[0,1] \times [0,1]$?

(1.5 val.) (2) Seja A_n uma sucessão de subespaços conexos de X tal que $A_n \cap A_{n+1}$ é não vazio. Mostre que o subespaço $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset X$ é conexo.

(3) Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Seja $f : X \to X$ uma aplicação tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

(1 val.) (a) Mostre que $B = \cap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$ é não vazio.

(1 val.) (b) Mostre que $f(B) = B$.

(1 val.) (c) Mostre que se $A \subset X$ é fechado e tem mais de um ponto, então $\operatorname{diam} f(A) < \operatorname{diam}(A)$.

(1 val.) (d) Mostre que f tem um único ponto fixo em X (isto é, existe um e um só x tal que $f(x) = x$).

(2 val.) (4) Mostre que um espaço localmente compacto e Hausdorff é completamente regular.

(5) Considere o espaço $\mathbb{R}^\omega$ das sucessões com a topologia caixa e o subespaço $\mathbb{R}^\infty \subset \mathbb{R}^\omega$ das sucessões eventualmente constantes iguais a 0. Considere ainda a topologia usual em $\mathbb{R}^n$. Para cada n há um mergulho natural

$$\phi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\infty$$

(2 val.) definido por $\phi_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Mostre que a topologia final em $\mathbb{R}^\infty$ determinada pelas aplicações ϕ_n é a topologia induzida pela topologia caixa.

Volte S. F. F.

(1 val.) (6) Mostre que o toro sólido $S^1 \times B^2$ não se retrata no subespaço $S^1 \times S^1$.

(7) Considere a esfera $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$.

(1 val.) (a) Mostre que a aplicação $h : S^3 \to S^3$ definida por

$$h(z_1, z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{3}} z_1, e^{\frac{4\pi i}{3}} z_2)$$

gera um subgrupo cíclico de ordem 3 do grupo de homeomorfismos de S^3.

(1 val.) (b) Seja G o grupo gerado por h. O espaço quociente S^3/G chama-se o espaço lenticular $L_{3,2}$. Determine o grupo $\pi_1(L_{3,2}, [(1,0)])$ e dê uma expressão para um representante de um gerador. Pode assumir que a aplicação quociente $S^3 \to L_{3,2}$ é uma aplicação de revestimento.

(1 val.) (8) Calcule o grupo fundamental da compactificação de Alexandroff do cilindro $S^1 \times]0, 1[$.

(2 val.) (9) Seja $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ a esfera unitária e $B^{k+1} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ a bola unitária. Mostre que uma aplicação contínua $h : S^k \to X$ é nul-homotópica sse se extende a uma aplicação contínua $B^{k+1} \to X$.